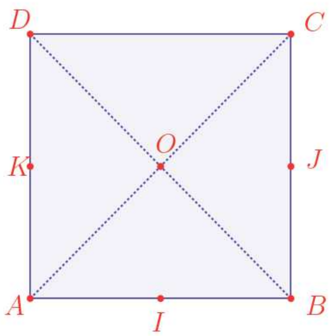
LPBT **Mr Masmoudi. R**

Sujet de révision N°4

EXERCICE 1 :

Le plan est orienté dans le sens direct.

On considère un carré $ABCD$ de centre O tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$. On désigne par I, J et K les milieux respectives des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[AD]$.



1. **a.** Montrer qu'il existe un unique déplacement R vérifiant : $R(A) = B$ et $R(B) = C$.

   b. Caractériser R.

2. Soit $f = r_{\left(B,\frac{\pi}{2}\right)} \circ t_{\overrightarrow{AC}} \circ S_A$.
   Déterminer $f(A)$ puis caractériser f.

3. On pose $T = f \circ R$.

   a. Déterminer $T(D)$ puis caractériser T.

   b. Soit $K' = T(K)$ et E le projeté orthogonal de A sur (DI).
   On pose $F = f(E)$.
   Montrer que les points F, K' et B sont alignés.

   c. Soit $R(E) = F'$. Caractériser $R \circ f^{-1}$ et en déduire que I est le milieu du segment $[FF']$.

4. Soit g l'antidéplacement qui envoie A sur B et B sur C.

   a. Montrer que g est une symétrie glissante.

   b. Donner les éléments caractéristiques de g et déterminer $g(K')$.

   c. Soit M un point du plan. Soientt M_1 et M_2 les images de M respectivement par R et g.
   Montrer que M_1 et M_2 sont symétriques par rapport à une droite fixe que l'on précisera.

5. Soit $h = R \circ g$.

   a. Déterminer $h(A)$ et $h(K')$.

   b. Montrer que $h = S_{(BC)} \circ t_{\overrightarrow{AC}}$ puis déterminer la forme réduite de h.

EXERCICE 2 :

Dans le plan complexe rapporté à un R.O.N.D $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points $A(2+2i)$, $B(2\text{-}2i)$, $C(\text{-}2\text{-}2i)$ et $D(4)$.

1) Soit a et b deux réels tels que : $a+b = 4$. On considère les points $M(a)$ et $N(ib)$.On construit le carré $MQNR$ de diagonale $[MN]$ et tel que $(\widehat{\overrightarrow{QN},\overrightarrow{QM}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

a) Montrer que la position du point Q est indépendante du choix de a et b.

b) Montrer que lorsque a et b varient, le milieu I de $[MN]$ décrit une droite Δ dont on donnera une équation cartésienne.

c) En déduire l'ensemble des points R quand a et b varie en vérifiant $a+b=4$.

2) Soit $r=R_{(B,\frac{\pi}{2})}$. Déterminer les points A' et D' images de A et B par r.

3) On pose $f=ros$ où s est la symétrie orthogonale d'axe $(O,\vec{u})$. Soit un point $M(z)$ et $M'(z')=f(M)$.

a) Montrer que $z'=i\,\overline{z}-4i$.

b) Montrer que f est une isométrie n'ayant aucun point invariant.

c) Soit $g=t_{\overrightarrow{OC}}\,oS$ où S est la symétrie orthogonale par rapport à la médiatrice de $[OB]$.

Déterminer $g(A)$, $g(B)$ et $g(D)$. En déduire que $f=g$.

EXERCICE 3 :

Les questions 1, 2, 3, 4 et 5 de cet exercice sont indépendantes.

1. Soient α et β deux entiers tels que $\begin{cases}\alpha+\beta\equiv 7\,(\text{mod}11)\\ \alpha-\beta\equiv 5\,(\text{mod}11)\end{cases}$.

a. Déterminer le reste de $\alpha^2-\beta^2$ modulo 11.

b. Montrer que : $2\alpha\equiv 1\,(\text{mod}11)$ en déduire que $\alpha\equiv 6\,(\text{mod}11)$.

c. Montrer que pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\alpha^{10k}\equiv 1\,(\text{mod}11)$ et en déduire le reste de α^{2021} modulo 11.

2. **a.** Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n, les restes de 7^n modulo 10.

b. Pour tout entier naturel n, on pose $a_n=1+7+7^2+\ldots+7^n=\sum_{k=0}^{n}7^k$.

Vérifier que : $6a_n=7^{n+1}-1$, en déduire que : a_n et 7^n sont premiers entre eux.

c. Donner le rest de $6a_{2021}$ modulo 10, en déduire que $a_{2021}\equiv 3\,(\text{mod}5)$.

d. Déterminer alors le chiffre d'unité de a_{2021}.

3. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $u_n=2^n+3\times 7^n+14^n-1$.

a. Montrer que pour tout entier naturel non nul, u_n est pair.

b. Soit p un nombre premier tel que $p>7$.
Soient a et b deux entiers naturels tels que $14=ab$.
Montrer que : $14a^{p-2}\equiv b\,(\text{mod}p)$ et que $14u_{p-2}\equiv 0\,(\text{mod}p)$.

c. Montrer que u_{51} est divisible par 106.

4. On considère dans $\mathbb{N}$ l'équation (E) : $x^{41}\equiv 4\,(\text{mod}7)$.
Soit x une solution de (E).

a. Montrer que : $x\wedge 7=1$ en déduire que $x^{42}\equiv 1\,(\text{mod}7)$.

b. Montrer que $x\equiv 2\,(\text{mod}7)$ en déduire l'ensemble des solutions de (E).

EXERCICE 4 :

Soit f la fonction définie sur $\left[0,+\infty\right[$ par $f(x)=\sqrt{\mathrm{e}^{2x}-1}$. On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement.

2. **a.** Montrer que $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f(x)}{x}=+\infty$. Interpréter graphiquement.

   b. Dresser le tableau de variation de f.

   c. Vérifier que pour tout $x\in\left]0,+\infty\right[$, $f''(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}\left(\mathrm{e}^{2x}-2\right)}{\left(\sqrt{\mathrm{e}^{2x}-1}\right)^3}$. En déduire que le point $I\left(\ln(\sqrt{2}),1\right)$ est un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}$.

   d. Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

3. **a.** Montrer que f possède une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\left[0,+\infty\right[$.

   b. Expliciter $f^{-1}(x)$, pour tout $x\in\left[0,+\infty\right[$.

   c. Tracer, dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, la courbe $\mathscr{C}'$ représentative de la fonction f^{-1}.

4. Soit g la fonction définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ par $g(x)=\tan x$.

   a. Montrer que g réalise une bijection de $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $\left[0,+\infty\right[$. On note g^{-1} sa fonction réciproque.

   b. Montrer que g^{-1} est dérivable sur $\left[0,+\infty\right[$ et que $\left(g^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, $x\in\left[0,+\infty\right[$,

5. Pour tout $x\in\left[0,+\infty\right[$, on pose $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et $G(x)=f(x)-g^{-1}\circ f(x)$.

   a. Montrer que pour tout $x\in\left]0,+\infty\right[$, $F'(x)=G'(x)$.

   b. Montrer alors que pour tout $x\in\left[0,+\infty\right[$, $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=f(x)-g^{-1}\circ f(x)$.

   c. Calculer l'aire $\mathcal{A}$ en unités d'aires de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=\ln(\sqrt{2})$.

6. Soit la suite (I_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :
   $I_0=\displaystyle\int_0^{\ln\sqrt{2}}\mathrm{d}x$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $I_n=\displaystyle\int_0^{\ln\sqrt{2}}(f(x))^n\,\mathrm{d}x$

   a. Vérifier que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et pour tout $x\in\left[0,+\infty\right[$, $(f(x))^n+(f(x))^{n+2}=\mathrm{e}^{2x}(f(x))^n$.

   b. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{n+2}(f(x))^{n+2}$ est une primitive sur $\left[0,+\infty\right[$ de la fonction $x\mapsto\mathrm{e}^{2x}(f(x))^n$.

   c. Montrer alors que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $I_n+I_{n+2}=\dfrac{1}{n+2}$.

   d. Montrer que la suite (I_n) est décroissante et déterminer sa limite.

7. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose : $U_n=I_{n+4}-I_n$.

   a. Vérifier que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}U_{4k+1}=I_{4n+5}-I_1$.

   b. Vérifier que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $U_n=(I_{n+4}+I_{n+2})-(I_{n+2}+I_n)$.