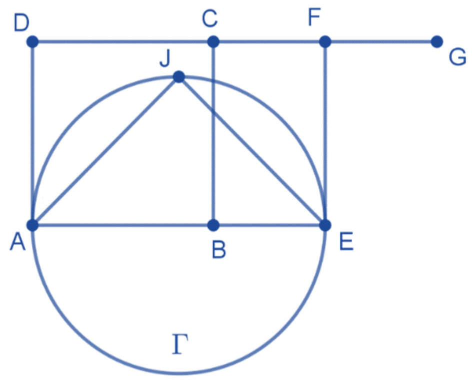
LPBT **Mr Masmoudi. R**

Sujet de révision N°2

EXERCICE 1 :

Le plan est orienté. Sur la figure ci-dessous, on a tracé un carré $ABCD$, un rectangle à $AEFD$ et un cercle Γ de diamètre $[AE]$ tel que : $\frac{BE}{AB} = \frac{AB}{AE} = k \in]0,1[$.

Les points J et G sont tels que AEJ un triangle rectangle et isocèle et F le milieu du segment $[CG]$.



1°) Soit f la similitude directe tel que : $f(A) = E$ et $f(E) = F$.

a) Justifier que f de rapport k et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

b) On note H le centre de f. Montrer que H appartient au cercle Γ.

c) Montrer que A, F et H sont alignés puis construire le point H.

d) Montrer que $f(F) = C$ puis déterminer $f(D)$.

e) Vérifier que : $k = \frac{1}{1+k}$ et en déduire que $k = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. (Le réel $\frac{1}{k}$ est appelé le ***nombre d'or***).

2°) Soit h l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{k}$. On note : $R = f \circ h$.

a) Déterminer $R(A)$ et en déduire que R est une rotation de centre J dont on précisera l'angle.

b) En déduire que JBF est un triangle rectangle et isocèle en J.

3°) Soit g la similitude indirecte tel que : $g(A) = E$ et $g(E) = F$.

a) Déterminer le rapport de g et en déduire qu'elle admet et un centre qu'on note : Ω.

b) Montrer que $\Omega \in (AF)$.

c) Montrer que $g = S_{(EF)} \circ f$ et en déduire que $\Omega \in (EG)$. Construire alors le point Ω.

4°) La parallèle à $(B\Omega)$ passant par E coupe $(A\Omega)$ en I.

a) Montrer que : $\frac{\Omega I}{\Omega A}=\frac{BE}{AB}$ et en déduire que $EI\Omega$ est un triangle isocèle en Ω.

b) Montrer alors que la droite $(B\Omega)$ est l'axe de g.

EXERCICE 2 :

On considère la suite (u_n) définie sur IN par $u_0=0$, $u_1=1$ et $u_{n+2}=5u_{n+1}-4u_n$ pour tout $n\in IN$

1°) a) Calculer u_2 , u_3 et u_4.

b) Montrer par récurrence que pour tout $n\in IN$, $u_n\in IN$ et $u_{n+1}=4u_n+1$.

c) En déduire que pour tout $n\in IN^*$, u_n et u_{n+1} sont premiers entre eux.

d) Montrer que pour tout $n\in IN$, $u_n=\frac{1}{3}(4^n-1)$.

e) Déterminer le $PGCD$ de (4^n-1) et $(4^{n+1}-1)$ pour tout $n\in IN^*$.

2°) a) Déterminer, suivant l'entier naturel non nul n, le reste de 4^n modulo 10.

b) En déduire que pour tout $p\in IN^*$, $u_{2p}\equiv 5\,[10]$ et $u_{2p+1}\equiv 1\,[10]$.

3°) On admet que 2017 est un nombre premier.

a) Justifier que $4^{2016}\equiv 1\,[2017]$.

b) En déduire que $u_{2020}\equiv 85\,[2017]$.

c) Calculer alors le reste de u_{2020} modulo 20170.

EXERCICE 3 :

1°) On cherche l'ensemble des couples d'entiers relatifs (x,y) solutions de l'équation $(E): 8x-3y=4$.

a) Vérifier que le couple $(2,4)$ est une solution particulière de (E).

b) Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

2°) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère la transformation f du plan, qui à tout point M d'affixe z, associe le point M' d affixe z' définie par : $z'=\sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{8}}z$.

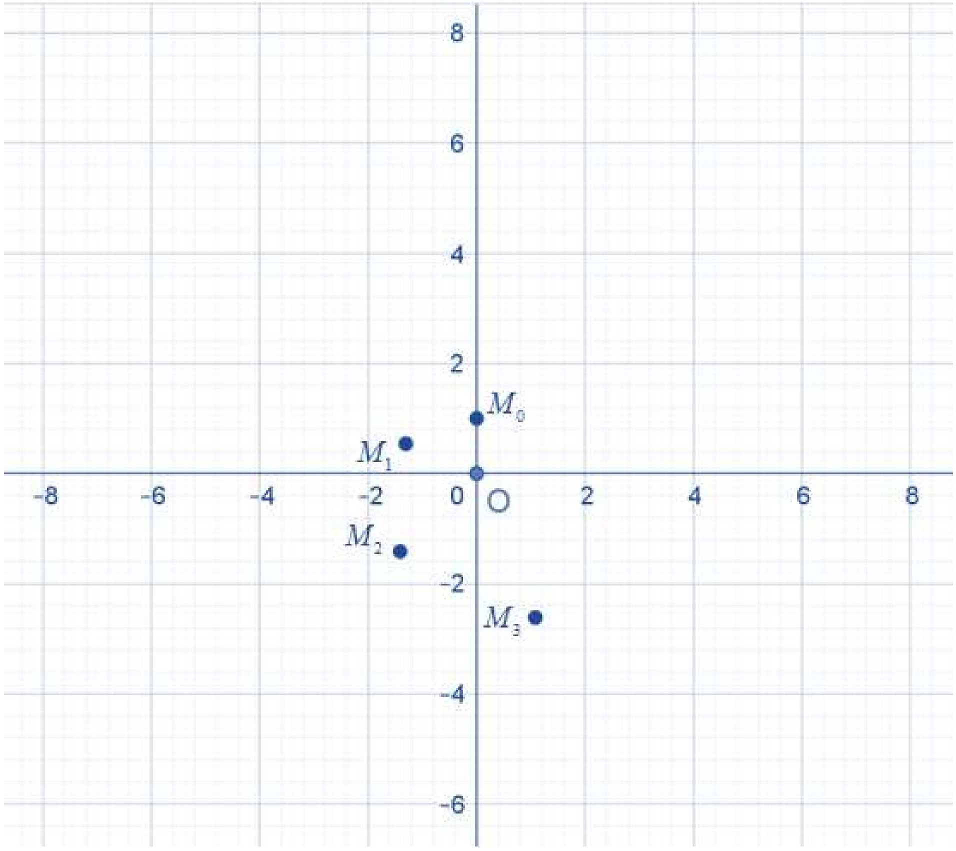
a) Montrer que f est une similitude directe de centre O dont on précisera le rapport et l'angle.

b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de la transformation : $g=f\circ f\circ f\circ f$

3°) On définit une suite de points (M_n) de la manière suivante :

Le point M_0 a pour affixe $z_0 = i$ et pour tout entier naturel n, $M_{n+1} = f\left(M_n\right)$. On note z_n l'affixe du point M_n.

Les points M_0, M_1, M_2 et M_3 sont placés sur la figure ci-dessous.



a) Montrer que pour tout entier naturel n, $OM_{n+4} = 4\,OM_n$ et que $\left(\widehat{\overrightarrow{OM_n},\overrightarrow{OM_{n+1}}}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}\left[2\pi\right]$.

b) Compléter la figure en construisant les points M_4, M_5 et M_6.

c) Montrer que pour tout entier naturel n, $z_n = \left(\sqrt{2}\right)^n e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{3n\pi}{8}\right)}$.

4°) Montrer que le point M_n appartient à l'axe des ordonnées si et seulement si n est un multiple positif
de 8

5°) Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que le point M_n appartient à l'axe des abscisses.

6°) On considère la transformation h du plan, qui à tout point M d'affixe z, associe le point M' d affixe z' définie par : $z' = \sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{8}}\,\overline{z}$.

a) Montrer que h est une similitude indirecte dont on précisera le centre et le rapport.

b) Montrer que $M_{n+1} = h\left(M_n\right)$ si et seulement si M_n appartienne à l'axe des abscisses.

c) Déterminer et construire alors l'axe Δ de g.

EXERCICE 4 :

A– 1°) On considère la fonction φ définie sur $\left[1,+\infty\right[$ par : $\varphi(x) = x^3 - 2x - 1$.

a) Montrer que l'équation : $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\left[1,+\infty\right[$.

b) En déduire le signe de $\varphi(x)$ sur $[1,+\infty[$.

c) Vérifier que : $\alpha^2 = \alpha + 1$ et en déduire que $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2°) On considère la fonction g définie sur $]1,+\infty[$ par : $g(x) = \dfrac{x^2+x}{\sqrt{x^2-1}}$.

a) Montrer que pour tout $x > 1$, $g'(x) = \dfrac{\varphi(x)}{\sqrt{x^2-1}^{\,3}}$.

b) On déduire que $g(\alpha)$ est le minimum de g sur $]1,+\infty[$.

3°) On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = g\left(e^x\right) = \dfrac{e^{2x}+e^x}{\sqrt{e^{2x}-1}}$.

a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$; interpréter graphiquement le résultat.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$; interpréter graphiquement le résultat.

c) Montrer que : $f'(x) > 0$ est équivalent à $x > \ln(\alpha)$.

d) Dresser le tableau de variation de f.

4°) On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Soit A et B les points de $\mathscr{C}_f$ d'abscisses respectives $\ln(\alpha)$ et $\ln\left(\alpha^2\right)$.

Sur la figure ci-dessous, on a tracé les courbes Γ et $\mathscr{C}_g$ représentatives respectivement des fonctions $\ln$ et g dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

a) Construire le point A et la tangente à $\mathscr{C}_f$ en ce point.

b) Construire le point C de Γ d'ordonnée $\ln\left(\alpha^2\right)$ puis le point D de $\mathscr{C}_g$ d'abscisse α^2.

c) Construire alors le point B puis tracer $\mathscr{C}_f$.

5°) Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équations :

$y = 0$, $x = \ln(\alpha)$ et $x = \ln \alpha^2$.

a) Vérifier que pour tout $x > 0$, on a : $\dfrac{\dfrac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-1}} + e^x}{\sqrt{e^{2x}-1} + e^x} = \dfrac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-1}}$.

b) Calculer $\mathcal{A}$ en fonction de α.

B– 1°) On considère la fonction φ_n définie sur $\left[\sqrt{n},+\infty\right[$ par : $\varphi_n(x)=x^3-n\ (2x+1)$ pour tout $n\in IN^*$.

a) Montrer que l'équation : $\varphi_n(x)=0$ admet une unique solution α_n dans $\left]\sqrt{n},+\infty\right[$ pour tout $n\in IN^*$.

b) Montrer que la suite $\left(\alpha_n\right)$ est croissante.

c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n=+\infty$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\alpha_n}{\sqrt{n}}=\sqrt{2}$ sachant que la suite $\left(\dfrac{\alpha_n}{\sqrt{n}}\right)$ est convergente.

2) En considère la fonction f_n définie sur $\left]\ln\left(\sqrt{n}\right),+\infty\right[$ par $f_n(x)=\dfrac{e^{2x}+e^x}{\sqrt{e^{2x}-n}}$ pour tout $n\in IN^*$.

a) Montrer que f_n admet un minimum en $\ln\left(\alpha_n\right)$ sur $\left]\ln\left(\sqrt{n}\right),+\infty\right[$.

b) Montrer que pour tout $n\in IN^*$, on a : $f_n\left(\ln\left(\alpha_n\right)\right)=\sqrt{\left(2\alpha_n+1\right)\left(\alpha_n+1\right)}$ et en déduire

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{f_n\left(\ln\left(\alpha_n\right)\right)}{\sqrt{n}}.$$