Masmoudi Radhouane

Sujet de révision Bac 2022

Exercice 1:

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$. On considère les points $A(1-i)$, $B(1+i)$ et $C(-1+i)$. On note $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $[AB]$.

1) Soit R la rotation de centre O telle que $R(A)=B$.
   a) Déterminer l'angle de R et le point $R(B)$.
   b) Déterminer $R(\mathscr{C})$ et faire une figure.
2) soit $\theta\in\left]0,\pi\right[\cup\left]0,2\pi\right[$, on note M le point d'affixe $z=1+ie^{i\theta}$ et $M'(z')=R(M)$.
   a) Montrer que M est un point de $\mathscr{C}$ distinct de A et B.
   b) Montrer que B, M et M' sont alignés.
   c) Soit N le milieu de $[AM]$. Déterminer l'ensemble des point N quand θ varie.
3) Une droite Δ passant par B et qui recoupe $\mathscr{C}$ en un point H et recoupe $R(\mathscr{C})$ en K. Montrer que $R(H)=K$.

Exercice 2:

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral ABC de sens direct. Ω un point intérieur au triangle ABC tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Omega}}\right)\equiv\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

I et J les projetés orthogonaux de Ω sur les droites (AB) et (AC) respectivement. On note D le point de (AC) tel que $DA=D\Omega$.

1) Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega J},\overrightarrow{\Omega D}}\right)\equiv\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.
2) Soit $R=S_{(\Omega D)}\circ S_{(\Omega J)}$.
   a) Caractériser R.
   b) Soit $F=R(J)$. Montrer que F est un point $[\Omega I)$.
3) Soit h l'homothétie de centre Ω et telle que $h(F)=I$ et on pose $f=h\circ R$.
   a) Vérifier que $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$.
   b) Montrer que f est une similitude directe de rapport $\left(1+\sqrt{3}\right)$ et préciser son centre et son angle.
4) Soit g la similitude indirecte de centre Ω telle que $g(J)=I$.
   a) Montrer que $g=f\circ S_{(\Omega J)}$ puis caractériser g.
   b) La droite (ΩD) coupe la droite (BC) en K. Construire le point $K'=g(K)$.

Exercice 3:

A) Soient $a\in\mathbb{N}^*$ et $b\in\mathbb{N}^*$ tels que le nombre premier 173 divise a^3+b^3.
   1) Montrer que $a^{171}\equiv-b^{171}$ (mod 173).
   2) Montrer que 173 divise a si et seulement si 173 divise b.
   3) Montrer que si 173 divise a alors 173 divise $a+b$.

4) Dans cette question, on suppose que 173 ne divise pas a.

   a) Montrer que $a^{171}(a+b) \equiv 0 \pmod{173}$.

   b) En déduire que 173 divise $a+b$.

B) On considère dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, l'équation (E) : $x^3+y^3=173(xy+1)$.

1) Soit (x,y) un couple solution de (E).

   a) Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $x+y=173k$.

   b) Vérifier que : $k(x-y)^2+(k-1)xy=1$.

   c) En déduire que $k=1$.

2) Résoudre (E).

Exercice 4:

A) Soit g la fonction définie sur $]0\,;1]$ par : $g(x)=\sqrt{\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)}$.

1) a) Etudier la dérivabilité de g en 1.

   b) Dresser le tableau de variation de g et tracer sa courbe $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

2) a) Montrer que g réalise une bijection de $]0\,;1]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

   b) Soit h la réciproque de g. Expliciter $h(x)$ pour $x \in$ J.

   c) Tracer la courbe de h dans le même repère.

B) On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x)=\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt$.

1) Etudier le sens de variation de F et montrer qu'elle est impaire.

2) a) Vérifier que pour tout $t \geq 2$, on a : $e^{-t^2} \leq e^{-2t}$.

   b) En déduire que pour tout $x \geq 2$, $F(x) \leq \dfrac{1}{2e^4}+F(2)$.

3) Montrer que F admet une limite finie ℓ en $+\infty$.

C) Soit G la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $G_n(x)=F\left(x\sqrt{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

1) a) Montrer que G_n est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et calculer sa dérivée.

   b) En déduire que $\displaystyle\int_0^1 e^{-nx^2}\,dx=\frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\,dt$.

2) a) Montrer que pour tout réel t, $e^t \geq 1+t$ et que pour tout $t \geq 0$, $e^{-t} \leq \dfrac{1}{1+t}$.

   b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\,dt \geq \sqrt{n}\int_0^1 \left(1-x^2\right)^n dx$ et que $\displaystyle\int_0^1 e^{nx^2}\,dx \leq \int_0^1 \frac{1}{\left(1+x^2\right)^n}\,dx$.

D) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n\,dx$ et $v_n=(n+1)u_n u_{n+1}$.

1) a) Calculer u_1 et u_2.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+2} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right) u_n$.

c) En déduire que la suite (v_n) est constante et que (u_n) est décroissante.

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left(\frac{n+1}{n+2}\right) \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ et calculer la limite de $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

3) a) Vérifier que pour tout $n \geq 2$, $u_n \sqrt{n} = \sqrt{\frac{u_n}{u_{n-1}} \times v_n}$.

b) En déduire les limites des suites $\left(u_n \sqrt{n}\right)$ et (u_n).

4) On considère les fonctions :

$$A(x) = \int_0^x (\sin t)^{2n+1} \, dt, \quad B(x) = \int_0^{\cos x} \left(1 - t^2\right)^n dt, \quad C(x) = \int_0^{\tan x} \frac{1}{\left(1+t^2\right)^n} dt$$

et $D(x) = \int_0^x (\cos x)^{2n-2} \, dx$

a) Montrer que les fonctions A et B sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et que C et D sont dérivables sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et calculer leurs dérivées.

b) Montrer que $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x)^{2n-2} \, dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2n-2} \, dx$

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{2n+1} = \int_0^1 \left(1 - x^2\right)^n dx$ et que

$$\int_0^1 \frac{1}{\left(1+x^2\right)^n} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2n-2} \, dx.$$

d) En déduire que $n \geq 2$, $u_{2n+1} \sqrt{n} \leq G_n(1) \leq u_{2n-2} \sqrt{n}$.

e) Montrer que $\ell = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.