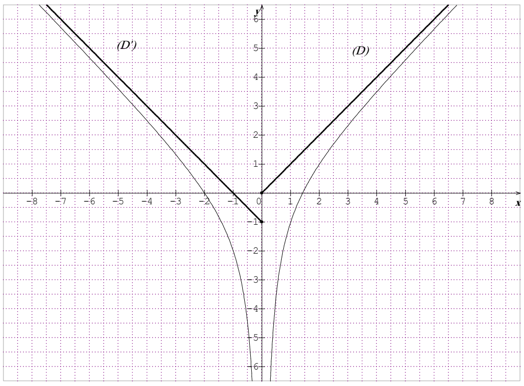
Exercice 1 :(5 points)

La courbe C ci-dessous est celle de f' la fonction dérivée d'une fonction f deux fois dérivable sur IR*, l'axe des ordonnées et les droites D et D' sont des asymptotes à C .



Répondre par Vrai ou Faux en justifiant votre réponse.

a) $\lim_{x\to 2} \frac{f(\sqrt{x+2})-f(2)}{x-2} = 1.$

b) $\lim_{x\to(-2)^-} \frac{\sqrt{f'(x)}}{x+2} = 0.$

c) Le domaine de $f'o\, f'$ = IR*

Exercice 2 :

Soit h la fonction définie sur IR*+ par :

h(1) = 0 et h' (x) = $\frac{1}{x}$ et f la fonction définie par :

f (x) = h (x + $\sqrt{1+x^2}$).

1°) a) Déterminer le domaine D de définition de f. b)

b)Mque f est dérivable sur D puis expliciter f' (x) .

2°) Prouver que f est une fonction impaire.

3°) Montrer que pour tout x de IR+, f (x) ≤ x.

Exercice :3

Soit f une fonction dérivable sur IR vérifiant ;

f (0) = 0 et f' (x) = $\frac{1}{1+x^2}$

A/ 1 / Montrer que f est une fonction impaire.

2 / a – Prouver que f (1) ≤ 1.

b – En étudiant les variations de la fonction K définie sur [1, +∞[par K (x) = f (x) + $\frac{1}{x}$

Montrer que f est majorée sur [1, +∞ [puis déduire que f admet une limite l en +∞.

B / Soit g la fonction définie par :g(x) = f (x)+f($\frac{1}{x}$)

1 / a – Etudier les variations de g .

b – Déduire que l = 2 f (1)

2 / On pose h (x) = tan x, pour x ∈] $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ [

a – Montrer que l = $\lim_{x\to\pi/2} (foh)(x)$

b – Mque pour tout x∈] $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ [on a f o h (x)= x

c – Déduire la valeur de l puis la valeur de f (1).

3 / Construire la courbe C de f dans un repère orthonormé.

Exercice 4 :

Soit f une fonction deux fois dérivable sur IR et telle que pour tout réel x :$f(2x) = 2f(x)$ **(1)**

1) a) Déterminer la valeur de f (0)

b) Démontrer que $f'(2x) = f'(x)$, x∈IR

2) Pour x réel fixé, on désigne par (u_n) la suite définie

sur IN par : $u_n = f'(\frac{x}{2^n})$

a) Montrer que la suite (u_n) est constante.

b) En déduire que pour tout réel x,

f' (x) = f' (0)

3) Déterminer toutes les fonctions deux fois dérivables sur IR qui vérifient la relation **(1)**

Exercice 5(7 points)

La courbe C donnée dans **l'annexe I** représente une fonction f définie et continue sur]0, +∞ [et dérivable sur]0, +∞ [\ {1, 2}.

- C admet au point A(2, 0) une demi- tangente verticale.
- Le point B(3, 2) est un point d'inflexion de C.
- C admet une branche parabolique de direction (O, $\vec{j}$) au voisinage de +∞
- C admet une asymptote verticale d'équation : x = 0.

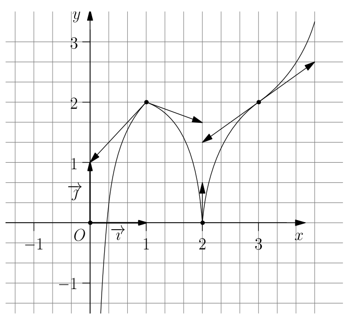
1) Calculer les limites suivantes :

$\lim_{x\to 0+} \frac{f(\cos x)}{x}$;$\lim_{x\to 2-} \frac{f(x)}{x-2}$

$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(3x)-f(x)}{x-1}$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x^2+1)}{x}$

2) Soit h la restriction de f sur [2, +∞[.

a) Montrer que h réalise une bijection de [2, +∞[sur intervalle J que l'on précisera. (On notera h^{-1} la bijection réciproque de h) b) Montrer que h^{-1} est dérivable sur J. Calculer $(h^{-1})'(2)$.



c) Construire la

courbe C' de h^{-1} dans le même graphique .

Exercice 6 :(7.5 points)

I/ Soit f la fonction définie sur]-2, 2[par :
$f(x) = \frac{2x}{|x|-2}$; on désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé ($O,\vec{\imath},\vec{\jmath}$).

1) a) Vérifier que f est impaire.
b) Etudier f puis tracer sa courbe C.

2) a) Montrer que f réalise une bijection de]-2, 2[sur un intervalle J que l'on précisera. On désigne par f^{-1} la bijection réciproque de f.
b) Construire la courbe C' de f^{-1} dans le même repère.
c) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour x de J.

II/ Soit g la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{4}[$ par :$g(x) = f(2\tan(x))$.

1) a) Dresser le tableau de variations de g.
b) En déduire que g réalise une bijection de $[0, \frac{\pi}{4}[$ sur un intervalle K à préciser.
On note h sa bijection réciproque.

2) a) Etudier la dérivabilité de h sur K.
b) Expliciter $h'(x)$ pour tout x de K.

3) Soit n >1 ,
a) Montrer que l'équation $h(x) = \frac{1}{n}$ admet une seule solution u_n dans $]-\infty, 0]$.
b) Etudier la monotonie de la suite (u_n)$_{n>1}$.
c) Déduire que la suite (u_n)$_{n>1}$ est convergente vers une limite que l'on précisera.

Exercice 7:

A/ Soit $f(x) = \frac{\sqrt{2x - x^2}}{x - 1}$; $x \in]1, 2]$

1) a/ Justifier la dérivabilité de f sur] 1, 2 [et exprimer f '(x) en fonction de x.
b/ Etudier la dérivabilité de f à gauche en 2 et interpréter, graphiquement, le résultat obtenu.
c/ Dresser le tableau de variation de f, puis construire la courbe C_f représentative de f dans le repère R.

2) a/ Mque l'équation f(x) = x admet dans] 1, 2] une solution unique α.
b/ Vérifier que $\alpha \in]\frac{3}{2}, 2[$.

3) a/ Mque f réalise une bijection de] 1, 2] sur un intervalle J que l'on déterminera. On notera $f^{-1} = g$.
b/ Etudier la dérivabilité de g.
c/Construire la courbe C_g dans le même repère R.
d/Mque pour tout x de J on a : $g(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

Exercice 8 :

Soit f la fonction définie sur [2, +∞[par
$f(x) = \sqrt{1 - \sin(\frac{\pi}{x})}$

1) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 2.
b) Etudier les variations de f puis tracer sa courbe C dans un repère orthonormé R.

2) a) Montrer que f admet une fonction réciproque g définie sur un intervalle J à préciser.
b) Construire la courbe C' de g dans le même repère que C

3) a) Déterminer $g'(\frac{\sqrt{2}}{2})$
b) Montrer que $\frac{1}{g}$ est dérivable sur J puis vérifier que $(\frac{1}{g})'(x) = \frac{-2}{\pi\sqrt{2-x^2}}$, $x \in$ J

4) Soit u la suite définie sur IN* \{1} par :

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} g\left(\frac{1}{n+k}\right)$$

a) Montrer que pour tout n de IN*\{1},
$\frac{n+1}{n} g(\frac{1}{2n}) \le u_n \le \frac{n+1}{n} g(\frac{1}{n})$
b) Déduire que la suite u est convergente.

5) Soit h la fonction définie sur [-1, 1] par
$h(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{2-x^2}}$ et H la primitive de sur [-1, 1] qui s'annule en 0.
a) Prouver que H est une fonction impaire.
b) Montrer que pour tout x de [0, 1[on a :
$1 - 4H(x) = \frac{2}{g(x)}$
c) Etudier les variations de H puis construire sa courbe dans un repère orthonormé R'.

Exercice :9 (7.5 points)

Soit f la fonction définie sur [0, 1] par :
$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}$

1) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et à gauche de 1.
b) Montrer que f est dérivable sur]0, 1[puis expliciter $f'(x)$.

2) Dresser le tableau de variations de f puis construire sa courbe dans un repère orthonormé ($O,\vec{\imath},\vec{\jmath}$).

3) a) Montrer que f admet une fonction réciproque g sur [0, 1].
b) Construire la courbe C' de g dans le même repère ($O,\vec{\imath},\vec{\jmath}$).
c) Etudier la dérivabilité de g sur [0, 1].

4) Montrer que pour tout x de [0, 1] on a : $g(x) = \frac{x^2}{x^2+(1-x)^2}$.

5) On pose la fonction définie sur $[0, \frac{1}{2}[$ par : $h(x) = \frac{1}{f(\cos^2(\pi x))}$.

a) Vérifier que $h(x) = 1 + \tan(\pi x)$, $\forall x \in [0, \frac{1}{2}[$

b) Déduire que h réalise une bijection de $[0, \frac{1}{2}[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

c) Etudier la dérivabilité de h^{-1} sur J puis expliciter $(h^{-1})'(x)$ pour tout x de J.

Exercice n°: 10 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $I = \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ par : $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{2x+1}}$.

On désigne par C la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (Unité 2 cm)

1°)a) Montrer que f est dérivable sur I et que pour tout $x > -\frac{1}{2}$, $f'(x) = \frac{2x+2}{\left(\sqrt{2x+1}\right)^3}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Etudier le signe de f(x) – x pour $x > -\frac{1}{2}$.

2°)a) Montrer que f réalise une bijection de I sur IR. On note g la bijection réciproque de f.

b) Tracer, dans le même repère, les courbes représentatives C et C ' respectivement de f et de g.

c) Montrer que $\forall x \in IR$, $g(x) = \frac{x}{4}\left(\sqrt{x^2+4} + x\right)$.

Exercice 11: (5 points)

Soit f la fonction définie sur]1, +∞[par $f(x) = \tan(\frac{\pi}{2x^2})$.

1) a) Montrer que f est dérivable sur]1, +∞[et que $f'(x) = \frac{-\pi}{x^3}(1 + \tan^2(\frac{\pi}{2x^2}))$

b) Déduire que f réalise une bijection de]1, +∞ [sur un intervalle J que l'on précisera.

c) Construire dans un même repère orthonormé $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ les courbes C et C' de f et f^{-1}.

2) a) Montrer que f^{-1} est dérivable sur J et calculer $(f^{-1})'(\frac{\sqrt{3}}{3})$.

b) Soit g la fonction définie sur]0, +∞ [par $g(x) = \left[\frac{1}{f^{-1}(x)}\right]^2$

M que g est dérivable sur]0, +∞ [puis expliciter g'(x)

3) Soit $n \in IN^*$;

a) Montrer que l'équation $f(x) = \sqrt{n}$ admet dans]1, +∞ [une solution unique α_n

b) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\in IN^*}$ est décroissante.

c) Déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\in IN^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

4) Soit $n \in IN^*$, $S_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \alpha_{n+k}$

a) Montrer que $\alpha_{2n} \le S_n \le \alpha_n$

b) Déduire que la suite S est convergente vers une limite que l'on précisera.

Exercice 12 (5 points)

On considère la fonction f définie sur [0, 1] par : $f(x) = \cos(\pi\sqrt{x})$

1) Etudier la dérivabilité de f en 0 à droite.

2) a) Dresser le tableau de variation de f puis tracer la courbe C de f dans le repère orthonormé $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$ donné dans **l'annexe I**.

b) Montrer que f admet une fonction réciproque g définie sur [-1,1]

c)Tracer la courbe C' de g dans le même repère R.

d) Soit φ la fonction définie sur [0, 1] par : $\varphi(x) = \cos(\pi(1 + \sqrt{x}))$

Montrer que la courbe de φ est l'image de celle de g par une rotation que l'on précisera

3) a) Montrer que g est dérivable en 1 à gauche et déterminer g'(1).

b) Etudier la dérivabilité de g en (-1) à droite.

c) Montrer que g est dérivable sur]-1, 1[et que $g'(x) = \frac{-2\sqrt{g(x)}}{\pi\sqrt{1-x^2}}$

4) Soit h la fonction définie sur [-1, 1] par $h(x) = \sqrt{g(x)}$

a) Montrer que h est dérivable sur]-1, 1[et que $h'(x) = \frac{-1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$

b)M que pour tout $x \in [-1, 1]$, h(x) + h(-x) = 1

Exercice 13 : (6 points)

I/ Soit f la fonction définie sur [0, π [par $f(x) = \sqrt[3]{\tan^2(\frac{x}{2})}$.

1) a) Etudier la dérivabilité de f en 0 à droite.

b) Etudier les variations de f sur [0, π [.

c) Déduire que f réalise une bijection de [0, π [sur un intervalle J que l'on précisera.

2) Tracer les courbes représentatives de f et de f^{-1} dans un repère un même repère orthonormé. On calculera f $(\frac{\pi}{2})$ et f $(\frac{2\pi}{3})$.

3) a) Etudier la dérivabilité de f^{-1} sur J.

b) Montrer que pour tout $x \geq 0$; $(f^{-1})'(x) = \frac{3\sqrt{x}}{1+x^3}$.

II/ On pose $g(x) = f^{-1}(x^2) + f^{-1}(\frac{1}{x^2})$; x >0.

1) a) Montrer que g est dérivable sur $]0, +\infty[$ puis calculer g'(x).

b) Déduire que pour tout x > 0 , $g(x) = \pi$.

2) Mque pour tout x > 0 et pour tout $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$
$f^{-1}(n) \leq f^{-1}(n+k) \leq f^{-1}(2n)$.

3) Soit la suite (u_n) définie par :
$u_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f^{-1}(\frac{1}{n+k})$.

a) Montrer que pour tout n > 0,
$f^{-1}(\frac{1}{2n}) \leq u_n \leq f^{-1}(\frac{1}{n})$.

b) Déduire que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 14:

Soit la fonction g définie sur l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$ par :

g(x) = f(tanx)

1) Montrer que g est dérivable sur l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$ et calculer g'(x)

2) Vérifier que : $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right]$; $g(x)=\frac{1}{\sin(2x)}$

3) a) Etudier les variations de g

b) Montrer que g réalise une bijection de $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$ sur $[1,+\infty[$

4) Soit h la réciproque de g

a) Montrer que h est dérivable sur $]1,+\infty[$ et que : $\forall x \in]1,+\infty[$, $h'(x)=\frac{-1}{2x\sqrt{x^2-1}}$

b) Etudier la dérivabilité de h à droite en 1.

Exercice 15: **(7 points)**

A/ Soit f la fonction définie sur]0 , 1] par
$f(x) = \frac{-2}{1-\sqrt{1-x}}$

1)Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1. Interpréter graphiquement le résultat

2) a) Montrer que f est strictement croissante sur]0, 1]

b) En déduire que f admet une fonction réciproque f^{-1}, continue sur $]-\infty, -2]$

c) Etudier la dérivabilité de f^{-1} à gauche en – 2.

3) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in]-\infty, -2]$

B/Soit la fonction g définie sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ par
$g(x) = f(\cos^2 x)$

1) Vérifier que pour tout x de $[0,\frac{\pi}{2}[$, on a :
$g(x) = \frac{-2}{1-\sin x}$

2) Montrer que g réalise une bijection de $[0,\frac{\pi}{2}[$ sur $]-\infty, -2]$

3) a) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $]-\infty, -2]$

b) Montrer que $(g^{-1})'(x) = \frac{1}{x\sqrt{-(1+x)}}$

4) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
$V_n = (n+n^2)\left(g^{-1}\left(-2-\frac{1}{n+1}\right) - g^{-1}\left(-2-\frac{1}{n}\right)\right)$

a) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ il existe u_n

réel $\alpha_n \in \left]-2-\frac{1}{n}, -2-\frac{1}{n+1}\right[$ tel que
$V_n = \frac{1}{\alpha_n\sqrt{-(1+\alpha_n)}}$

b) En déduire la limite de la suite (V_n)

Exercice 16 : **(4 points)**

Soit n un entier naturel non nul .

Soit f_n la fonction définie sur $]0, \frac{1}{2}]$ par :
$f_n(x) = \frac{1}{\sin(\pi x)} - x^n - 2$.

1)a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet dans l'intervalle $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ une solution unique α_n.

b) M que $\forall x \in]0, \frac{1}{2}[$, on a : $f_{n+1}(x) > f_n(x)$.

En déduire que $f_{n+1}(\alpha_n) > 0$

c) Montrer que la suite (α_n) est croissante et qu'elle est convergente.

2) Soit g la bijection de $]0, \frac{1}{2}]$ sur $[1, +\infty[$ définie par : $g(x) = \frac{1}{\sin(\pi x)}$

On note g^{-1} la réciproque de g.

a) Calculer $g^{-1}(2)$

b) Montrer que : $\alpha_n = g^{-1}(2+(\alpha_n)^n)$.

Calculer alors $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha_n)$.

Exercice 17 :(6 points)

Soit f la fonction définie sur $]0; \frac{1}{2}]$ par :
$f(x) = \sqrt[3]{\frac{2\cos(\pi x)}{1-\cos(\pi x)}}$.

1) a/ Etudier la dérivabilité de f en $\frac{1}{2}$ a gauche.

b/ Prouver que f est dérivable sur $]0; \frac{1}{2}[$ et calculer $f'(x)$; $x \in]0; \frac{1}{2}[$.

c/ Etudier les variations de f puis construire sa courbe dans un repère orthonormé R'(O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).

2)

a/ Prouver que f réalise une bijection de $]0; \frac{1}{2}]$ sur un intervalle J. Construire la courbe C' de f^{-1} dans le même repère R'.

b/ Montrer que f^{-1} est dérivable sur J .

c/ Montrer que, pour tout $x \in$ J on a :$\cos(\pi f^{-1}(x)) = \frac{x^3}{2+x^3}$.

Expliciter alors $(f^{-1})'(x)$ pour tout x de J.

d/ Déduire la primitive qui s'annule en $\sqrt[3]{2}$ de la fonction φ définie sur IR+ par $\varphi(x) = \frac{x^2}{(2+x^3)\sqrt{1+x^3}}$

3) Soit h_n la fonction définie sur $]0, \frac{1}{2}]$ par $h_n(x) = f(x) - x^n$ où $n \in IN^*$.

a/ Prouver que l'équation $h_n(x) = 0$ possède une seule solution α_n dans $]0; \frac{1}{2}[$.

b/ Montrer que $h_{n+1}(\alpha_n) = (\alpha_n)^n(1 - \alpha_n)$.

c/ Etudier la monotonie de la suite $(\alpha_n)_{n \in IN^*}$.

d)Montrer que $(\alpha_n)_{n \in IN^*}$ est convergente vers une limite que l'on précisera.

e/ Calculer alors $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k} C_n^k (\alpha_n)^k$.

Exercice 18 :(6points)

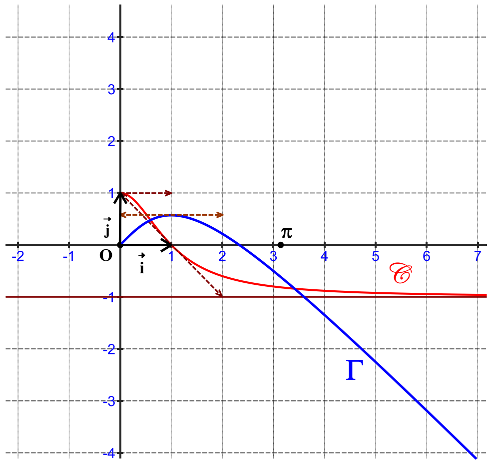
I Ci dessous, on a tracé dans un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) les courbes $\mathscr{C}$ et Γ qui représentent : une fonction f définie et deux fois dérivable sur IR+ ainsi que sa primitive F. On admet que $\mathscr{C}$ est au dessus de son asymptote la droite d'équation $y=-1$ et que $A\left(1, \frac{\pi}{2}-1\right) \in \Gamma$

1) **A l'aide d'une lecture graphique**
   a) Montrer que $\mathscr{C}$ est la courbe de f
   b) Calculer $(F o f)'(1)$
   c) Montrer que l'équation $f''(x) = -1$ admet au moins une solution dans $[0, 1]$

d) Justifier que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $]-1, 1]$. Tracer la courbe $\mathscr{C}'$ de f^{-1}

2) On admet que pour tout $x \ge 0$, $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

Montrer que pour tout $x \in]-1, 1]$, $f^{-1}(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x}$



3) Soit g la fonction définie sur $[0, \pi[$ par $g(x) = f^{-1}(\cos x)$
   a) Vérifier que pour tout $x \in [0, \pi[$, $g(x) = \frac{\sin x}{1+\cos x}$
   b) Montrer que g est dérivable à droite en 0 et que pour tout $x \in [0, \pi[$, $g'(x) = \frac{1}{1+\cos x}$

4) a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur IR+
   b) Montrer que g^{-1} est dérivable sur IR+ et que pour tout $x \ge 0$, $(g^{-1})'(x) = \frac{2}{x^2+1}$

5) Montrer que pour tout $x > 0$, $F(x) = \pi - x - g^{-1}(\frac{1}{x})$ et déduire que Γ admet une asymptote oblique D. Tracer D

6) Montrer que l'équation $F(\frac{x}{2}) + \frac{x}{2} = 1$ admet une solution unique α dans $[0, 2]$

Exercice 19:

Soit f la fonction définie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ par

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1-\sin x}{\cos x} & \text{si } x\in]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}[\\ f(\dfrac{\pi}{2})=0 & \end{cases}$$

1) a) Montrer que f est continue à gauche en $\frac{\pi}{2}$.

b) Montrer que f est dérivable en à gauche en $\frac{\pi}{2}$ et que $f'_g(\frac{\pi}{2})=-\frac{1}{2}$.

2) a) Etudier les variations de f. En déduire que f est une bijection de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Montrer que l'équation f(x) = x admet une solution unique α et que $\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{4}$.

3) Soit g une fonction dérivable sur IR+ et que pour tout x $\in$ IR+ $g'(x)=\dfrac{-2}{1+x^2}$. et g(1) = 0 et dont le tableau de variation est donné par :

x	0	+00
g(x)	$\frac{\pi}{2}$ ↘	$\frac{\pi}{2}$

a)Ecrire la tangente à Cg au point I d'abscisse 1

b) Etudier la position de Cg par rapport a la tangente en I

c) Montrer que (gof)'(x) =1 pour tout x de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

d) En déduire que gof(x) =x ,pour tout x de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

II Soit h la fonction définie sur [0,1] par :

$$\begin{cases} h(x)=g(x)-g\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) & \text{si } x\in[0,1[\\ h(1)=\dfrac{\pi}{2} & \end{cases}$$

1) a) Montrer que h est continue sur [0,1].

b) Montrer que h est dérivable sur [0,1[et calculer h'(x).

2) Soit $v_n=\dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n} g\left(\alpha+\dfrac{1}{n+k}\right)$; $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$;

$$\frac{n+1}{n}g\left(\alpha+\frac{1}{n}\right)\le v_n\le\frac{n+1}{n}g\left(\alpha+\frac{1}{2n}\right).$$

b) En déduire que (v_n) est convergente et que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\alpha$.

Exercice 20 : (8 points)

Soit *f* la fonction définie sur $I=\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ par :

$$f(x)=\frac{1-x}{\sqrt{2x-1}}$$

I°)1) Montrer que *f* est dérivable sur I et que pour tout réel $x>\frac{1}{2}$, $f'(x)=\dfrac{-x}{\left(\sqrt{2x-1}\right)^3}$.

2)a) Dresser le tableau de variations de *f*.

b) Construire la courbe C de *f* dans un repère orthonormé (O, $\vec{i},\vec{j}$)

3)a) Montrer que *f* réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera.

On désignera par g la réciproque de *f*.

b) Construire, dans le même repère (O, $\vec{i},\vec{j}$), la courbe C' de g.

c) Expliciter g(x), x∈IR.

II °) Soit F la fonction définie sur $\left]\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$ par :

$$F(x)=\frac{1}{1-\sin(2x)}$$

1) a) Montrer que F réalise une bijection de $\left]\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$ sur $\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$. On note G la réciproque de F.

b) Justifier que $G(1)=\frac{\pi}{2}$ *et* $G(2)=\frac{5\pi}{12}$

2) a) Etudier la dérivabilité de G à droite en $\frac{1}{2}$.

b) Montrer que G est dérivable sur $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ et que $\forall x>\frac{1}{2},\ G'(x)=\dfrac{-1}{2x\sqrt{2x-1}}$

3) Montrer que l'équation (E) : G(x) = x admet dans $]1,2[$ une unique solution α.

4) a) Montrer que la fonction tangente réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ sur IR.

On note $\tan^{-1}$ sa bijection réciproque.

b) Montrer que la fonction $\tan^{-1}$ est dérivable sur IR et que $\forall x \in IR,\ \left(\tan^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{1+x^2}$.

c) Montrer que

$$\forall x \in \left]\frac{1}{2},+\infty\right[,\ G(x)=\frac{1}{2}\left(\pi+\tan^{-1}\left(f(x)\right)\right)$$