

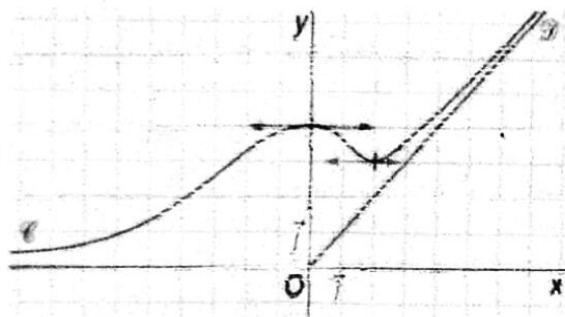
M.BHIRI

Exercice 1 VRAI - FAUX.

- 1) Sur  $\mathbb{R}$ , la fonction  $f: x \mapsto (x+1)^3$  a pour primitive la fonction  $x \mapsto \frac{1}{3}(x+1)^3$
- 2) Sur  $\mathbb{R}$ , la fonction  $f: x \mapsto (x^2+1)^2$  a pour primitive la fonction  $x \mapsto \frac{1}{3}(x^2+1)^3$
- 3) Les fonctions :  $x \mapsto x(x-2)$  et  $x \mapsto (x-1)^2$  sont deux primitives sur  $\mathbb{R}$  de la même fonction.
- 4) Sur  $\mathbb{R}$ , la fonction  $x \mapsto x \sin x$  a pour primitive la fonction  $x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 \cos x$
- 5) Si  $f$  est une fonction continue sur un intervalle  $I$ , alors elle admet une primitive  $F$  qui s'annule au moins une fois sur  $I$ .
- 6) Sur  $\mathbb{R}^+$ , la fonction  $f: x \mapsto \sqrt[3]{x}$  a pour primitive la fonction  $x \mapsto \frac{1}{3}x\sqrt[3]{x}$

Exercice 2 VRAI - FAUX.Soit  $g$  une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

Sa courbe  $\zeta$  est représentée sur le graphique ci-dessous dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , ainsi que ses tangentes « horizontales » et ses asymptotes d'équation :  $y = 0$  en  $-\infty$  et  $y = x$  en  $+\infty$ .

On appelle  $F$  l'ensemble des primitives  $f$  sur  $\mathbb{R}$  de la fonction  $g$ .

Répondre par Vrai ou faux aux affirmations suivantes en justifiant la réponse.

- 1) Toute fonction  $f$  de  $F$  admet un maximum relatif en 0.
- 2) Toute fonction  $f$  de  $F$  vérifie  $f(0) > f(1)$ .
- 3) Il existe au moins une fonction  $f$  de  $F$  telle que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution sur l'intervalle  $]0; 1[$ .
- 4) Il existe au moins une fonction  $f$  de  $F$  telle que l'ensemble des solutions de l'inéquation  $f(x) > 1$  soit l'intervalle  $]0; +\infty[$ .
- 5) Il existe au moins une fonction  $f$  de  $F$  qui est bornée sur  $\mathbb{R}$ .

Exercice 3 VRAI - FAUX.Soit  $f$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  et  $g$  une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .Pour tout réel  $x$ , on pose  $h(x) = g(x+1) - g(x)$ .

Répondre aux questions suivantes en justifiant la réponse.

- 1) Si on sait que  $f$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ , peut-on conclure que  $g$  est croissante sur  $\mathbb{R}$  ?
- 2) Si on sait que  $f$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ , peut-on conclure que  $h$  est croissante sur  $\mathbb{R}$  ?

Exercice 4 O-C-MDonner (la ou les) bonnes réponses. Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  et  $F$  la primitive de  $f$  qui vérifie  $F(0) = 2$ .

- 1) La primitive  $G$  de la fonction  $x \mapsto f(2x)$  qui vérifie  $G(0) = 2$  est telle que  $G(x)$  est égal à :  
a)  $F(2x) + 1$     b)  $\frac{1}{2}F(2x) + 1$     c)  $\frac{1}{2}F(2x)$
- 2) La primitive  $H$  de la fonction  $x \mapsto f(x+2)$  qui vérifie  $H(0) = 2$  est la fonction :  
a)  $x \mapsto F(x+2)$     b)  $x \mapsto F\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)$     c)  $x \mapsto F(x+2) + 2 - F(2)$
- 3) La primitive  $J$  de la fonction  $x \mapsto f(x) + 2$  qui vérifie  $J(0) = 2$  est la fonction :  
a)  $x \mapsto F(x) + 2$     b)  $x \mapsto F(x) + 2x$     c)  $x \mapsto F(x)$

Exercice 5 O-C-M1) Une primitive de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x(3x^2+1)^2$  est la fonction  $g$  telle que :

a)  $g(x) = 18(3x^2+1)$     b)  $g(x) = \frac{1}{2}x^2(x^3+1)$     c)  $g(x) = \frac{1}{18}(3x^2+1)^3$

2) La fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = 2\cos^2x + \sin^2x$  a pour dérivée la fonction  $g$  telle que, pour tout réel  $x$ ,  $g(x)$  est égal à :

a)  $4\cos x + 2\cos 2x$     b)  $2(\cos 2x - \sin 2x)$     c)  $4\cos x \sin x - 2\cos^2 x$

3) Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $g$  une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ , alors la dérivée de  $g \circ f$  est :

a)  $f' \cdot f \circ f$     b)  $f \circ f$     c)  $f \circ f'$

4) Si  $F$  et  $G$  sont deux primitives d'une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  telles que  $F(0) = -1$  et  $G(0) = 1$ , alors on peut conclure que :

a)  $F(1) = G(1)$     b)  $F(1) < G(1)$     c)  $F(1) > G(1)$



terminer les primitives sur I de chacune des fonctions suivantes :

f:  $x \mapsto 3x^3 - 2x + 2$ ,  $I = \mathbb{R}$

f:  $x \mapsto x + 2 + \frac{1}{x^3}$ ,  $I = ]0, +\infty[$

f:  $x \mapsto \frac{3x^2 + 4x - 2}{x^4}$ ,  $I = ]0, +\infty[$

f:  $x \mapsto \frac{2}{\sqrt[3]{2x-1}}$ ,  $I = \left] \frac{1}{2}, +\infty[ \right.$

f:  $x \mapsto \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x}}$ ,  $I = ]1, +\infty[$

f:  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{-4x+3}}$ ,  $I = \left] -\infty, \frac{3}{4} \right[$

f:  $x \mapsto \frac{3x}{\sqrt{x^2-1}}$ ,  $I = \left] -\infty, -1 \right[ \cup \left] 1, +\infty \right[$

f:  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{-4x+3}}$ ,  $I = \left] -\infty, \frac{3}{4} \right[$

f:  $x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$ ,  $I = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$

f:  $x \mapsto \tan^2(2x)$ ,  $I = \left] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right[$

f:  $x \mapsto \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)$ ,  $I = \left] -\pi, \pi \right[$

**Exercice 7 :**

Déterminer une primitive sur l'intervalle I de chacune des fonctions suivantes :

a) f:  $x \mapsto \cos x \sin^2 x$ ,  $I = \mathbb{R}$

b) f:  $x \mapsto \frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos x}}$ ,  $I = \left] -\pi, \pi \right[$

c) f:  $x \mapsto \sin x \sin 2x$ ,  $I = \mathbb{R}$

d) f:  $x \mapsto \tan x + \tan^3 x$ ,  $I = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$

**Exercice 8 :**

Déterminer une primitive sur  $\mathbb{R}$  de chacune des fonctions suivantes :

1) f:  $x \mapsto 3 \cos 2x + 2 \sin 3x$  ; 2) f:  $x \mapsto \cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)$

3) f:  $x \mapsto \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$  ; 4) f:  $x \mapsto \cos x - x \sin x$

**Exercice 9 :**

Déterminer la primitive F de f sur l'intervalle I vérifiant la condition indiquée.

1) f:  $x \mapsto 4x^2 - 3x + 2$ ,  $I = \mathbb{R}$  et  $F(-1) = 0$  ;

2) f:  $x \mapsto 3x + 1 + \frac{1}{x^2}$ ,  $I = \left] -\infty, 0 \right[$  et  $F(-2) = 1$  ;

3) f:  $x \mapsto \cos 3x$ ,  $I = \mathbb{R}$  et  $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$

f:  $x \mapsto \sqrt{4-x}$ ,  $I = \left] -\infty, 4 \right[$  et  $F(0) = 0$  ;

5) f:  $x \mapsto \cos x \sin 2x$ ,  $I = \mathbb{R}$  et  $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$  ;

6) f:  $x \mapsto \tan^2 x$ ,  $I = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$  et  $F(0) = 1$  ;

**Exercice 10 :**

Soit f la fonction définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  par :  $f: x \mapsto \frac{2x+3}{(x-1)^3}$

1) Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout  $x \neq 1$  :

$$f(x) = \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{(x-1)^3}$$

2) En déduire une primitive de f sur  $]-\infty, 1[$

**Exercice 11 :**

Soit f la fonction définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$  par :  $f(x) = \frac{3x^2+4}{(x^2-4)^3}$

1) Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout x distinct de -2 et de 2 :

$$f(x) = \frac{a}{(x-2)^3} + \frac{b}{(x+2)^3}$$

2) En déduire une primitive de f sur  $]-2, 2[$ .

**Exercice 12 :**

Soit u une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I.

1) Quelle est la dérivée sur I de la fonction  $u\sqrt{u}$  ?

2) En déduire les primitives sur I de la fonction  $u'\sqrt{u}$ .

3) Application : Déterminer les primitives sur I de chacune des fonctions suivantes :

a) f:  $x \mapsto 2\sqrt{2x+3}$ ,  $I = \left] -\frac{3}{2}, +\infty \right[$

b) f:  $x \mapsto x\sqrt{x^2+1}$ ,  $I = \mathbb{R}$

c) f:  $x \mapsto (x-1)\sqrt{x^2-2x+1}$ ,  $I = \left] 1, +\infty \right[$

d) f:  $x \mapsto \frac{2x-3}{\sqrt{x+1}}$ ,  $I = \left] -1, +\infty \right[$

**Exercice 13 :**

Soit f et g les fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \cos x \cos 2x$  et  $g(x) = \sin x \sin 2x$

1) Vérifier que la fonction  $f - g$  s'écrit sous la forme  $\cos(u)$ , où u est une fonction que l'on précisera.

En déduire une primitive sur  $\mathbb{R}$  de  $f - g$ .

2) Déterminer une primitive sur  $\mathbb{R}$  de  $f + g$ .

3) En déduire les primitives des fonctions f et g.

**Exercice 14 :** Soit f la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x \sin x$ .

1) Démontrer que, pour tout réel x :  $f(x) = 2 \cos x - f''(x)$

2) En déduire la primitive de f sur  $\mathbb{R}$  qui prend la valeur 0 en  $\pi$



**exercice 0 :** Soit  $f$  une primitive sur  $\mathbb{R}$  de  $u$  qui à tout réel  $t$ , associe  $u(t) = \frac{1}{2t^2 - 2t + 1}$  et  $g$  la bijection

$$I = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ \text{ sur } \mathbb{R} \text{ définie par : } g(x) = f\left(\frac{1 + \tan x}{2}\right)$$

Prouver que  $g$  est dérivable sur  $I$ .  
Montrer que  $g$  est une application affine.

Calculer  $\int_0^1 \frac{1}{2t^2 - 2t + 1} dt$ .

**exercice 1 :**

Justifier leur existence, puis calculer les intégrales :

a)  $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4x+1}} dx$     b)  $\int_1^2 \frac{2}{(3u-1)^2} du$     c)  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin t)(\cos^2 t) dt$

d)  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x \cdot \cos x \cdot dx$     e)  $\int_{-1}^0 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$     f)  $\int_{-1}^0 x\sqrt{x^2+1} dx$

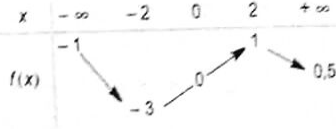
g)  $\int_0^1 \frac{t-1}{(t+1)^5} dt$     h)  $\int_{-1}^0 \frac{3x}{(x^2+1)^3} dx$     i)  $\int_0^1 x \sin(\pi x^2) dx$

j)  $\int_0^3 \frac{x^2+3x+1}{(2x+3)^5} dx$     k)  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^3(t) dt$

l)  $\int_{-1}^{\frac{\sqrt{3}-1}{2}} \frac{t+1}{\sqrt{-t^2-2t}} dt$     m)  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^4(t) dt$

**Exercice 2 Q-C-M.**

On donne le tableau des variations d'une fonction  $f$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .



1) Le signe de

l'intégrale  $J = \int_0^{-3} f(t) dt$  est :

a) positif    b) négatif    c) impossible à déterminer par le tableau

2) Le signe de l'intégrale  $\int_{-2}^2 f(t) dt$  est :

a) positif    b) négatif    c) impossible à déterminer par le tableau

3) La valeur moyenne  $\mu$  de  $f$  sur  $[-2; 0]$  vérifie :

a)  $-\frac{3}{2} \leq \mu \leq -\frac{1}{2}$     b)  $-3 \leq \mu \leq 0$     c)  $0 \leq \mu \leq \frac{3}{2}$

3) La limite de  $\int_2^x f(t) dt$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  est :

a)  $+\infty$     b) un réel  $L$  non nul    c) impossible à déterminer par le tableau

**Exercice 3 :**

Calculer à l'aide d'une intégration par parties :

a)  $\int_0^{\pi} t \sin t dt$     b)  $\int_{\frac{\pi}{2}}^0 (2t-1) \cos t dt$     c)  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x^2 \cos 3x dx$

d)  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\pi} x \sin 2x dx$     e)  $\int_0^1 x \sin^2(\frac{\pi}{2} x) dx$

**Exercice 4 : VRAI - FAUX.**

Soit  $F$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$

1)  $F$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  de dérivée continue.

$F'$  est la fonction  $x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$ , définie sur  $\mathbb{R}$ .

2) La fonction  $U$  définie sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  par  $U(x) = F(\tan x)$  est dérivable de dérivée constante égale à 1.

3) Pour tout  $x$  de  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $U(x) = x + 1$ .

4)  $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$

5) La valeur moyenne de  $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$  sur  $[0; 1]$  est  $\frac{\pi}{4}$

**Exercice 5 : VRAI - FAUX.**

On considère une fonction  $f$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

1) On a  $\int_{-1}^3 -f(x) dx = -\int_3^{-1} f(x) dx$

2) On a  $\int_{-1}^3 -f(x) dx = \int_1^{-3} f(x) dx$

3) Si  $\int_0^1 f'(x) dx = 0$ , alors  $f$  est constante sur  $[0; 1]$ .

4) Si  $f$  est négative sur  $\mathbb{R}$  alors, pour tout réel  $x$ ,  $\int_0^x f(t) dt \leq 0$

5) Si  $f$  est négative sur  $\mathbb{R}$ , alors la fonction, définie par  $x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ , décroît sur  $\mathbb{R}$ .

6) Si  $\int_0^1 f'(x) \cdot f(x) dx = 0$ , alors  $f(0) = f(1)$  ou  $f(0) = -f(1)$

**Exercice 6** Soit  $U_n = \int_0^1 (1-t)^n \sin(\pi t) dt$

- 1) Etudier la monotonie de la suite  $(U_n)$
- 2) Montrer que  $(U_n)$  est minorée par 0. Conclure.
- 3) Calculer la limite de la suite  $(U_n)$

[indication : Montrer que  $0 \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$ ]

**Exercice 7** On pose  $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1+x^2}} dx$ , pour  $n \in \mathbb{N}$

- 1) Calculer  $I_0$ .
- 2) En intégrant par parties, montrer que pour tout entier naturel  $n \geq 1$  on a :  $(2n+1) I_n = \sqrt{2} - 2n I_{n-1}$ .
- 3) En déduire  $I_4$ .
- 4) Etudier la convergence de la suite  $I_n$ .

**Exercice 8**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0, \pi]$  par

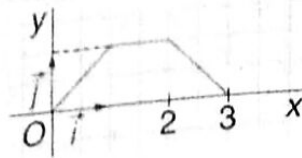
$$f(x) = \frac{\sin 2x}{1 + 2 \sin x}$$

a) Vérifier que  $f(\pi - x) = -f(x)$

montrer que  $\int_0^{\pi} f(x) dx = 0$  (deux

**Exercice 9 : VRAI - FAUX,**

1) Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0; 3]$  dont on donne la courbe représentative ci contre



a)  $\int_0^5 f(x) dx = \frac{15}{8}$  b)  $b \in [0; 1[$

alors  $\int_0^b f(x) dx = b^2$ .

c)  $\int_1^3 f(t) dt = \int_0^2 f(u) du$  d) Si  $c \in [1; 2]$ ,

alors  $\int_0^c f(x) dx = c - \frac{1}{2}$ .

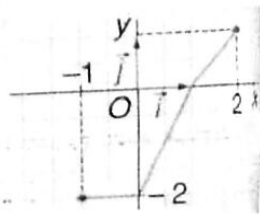
2) Soit  $g$  la fonction définie sur  $[-1; 2]$  dont on donne  $C_g$

a)  $\int_{-1}^0 g(t) dt = -2$ .

b)  $\int_{-0.5}^{0.5} g(x) dx = 0$

c)  $\int_{-1}^2 g(t) dt = -2.5$

d)  $\int_{0.5}^2 g(u) du = 0$



3)  $f$  et  $g$  sont les fonctions définies dans 1 et 2

a) la valeur moyenne de  $f$  sur  $[0; 3]$  est  $\frac{1}{2}$ .

b) la valeur moyenne de  $g$  sur  $[-1; 2]$  est  $-\frac{5}{6}$ .

c) Si une fonction est négative sur  $[a; b]$ , sa valeur moyenne est négative.

d) Si la valeur moyenne d'une fonction sur  $[a; b]$  est négative, alors la fonction est négative sur  $[a; b]$ .

**Exercice 10 :**

Soit  $f$  la fonction sur  $[-3; 3]$  et représentée ci-contre : Sur  $[-2; 2]$ , sa courbe représentative est un demi-cercle.

1) Calculer  $\int_{-2}^2 f(t) dt$  et

$\int_{-3}^3 f(t) dt$ .

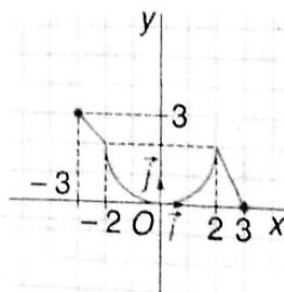
2) Soit  $g = -f$ .

Calculer  $\int_{-3}^0 g(t) dt$ .

3) soit  $h$  la fonction définie sur

$[-3; 3]$  par :  $h(x) = f(x) - 2$

calculer  $\int_{-3}^3 h(x) dx$ .



**Exercice 11 :**

On considère la fonction  $g$  définie sur  $[-2; 2]$  par :

- $g(x) = 2$ , si  $x \in [-2; -1]$

- $g(x) = -2x$ , si  $x \in [-1; 2]$

représenter la fonction  $g$  dans un repère orthonormé.

2) Calculer  $\int_{-2}^0 g(t) dt$  et  $\int_{-2}^2 g(t) dt$

3) Déterminer le réel  $x$  de  $[0; 2]$  tel  $\int_{-2}^x g(t) dt = 0$

**Exercice 12:** Soit  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

1) a) Etudier les variations de  $f$   
b) Construire  $C_f$ .

Soit  $F$  la fonction définie sur  $[-1; 1]$  par

$F(x) = \int_0^x f(t) dt$

2) On considère la fonction  $g$  définie sur  $[0; \pi]$  par :  $g(x) = F(\cos x)$

a) Montrer que  $g$  est dérivable sur  $[0; \pi]$  et que

$g'(t) = \frac{1}{2} (\cos(2t) - 1)$

b) En déduire  $g(t)$  pour tout  $t$  appartenant à  $[0; \pi]$

c) Calculer  $\int_{-1}^1 f(t) dt$

**Exercice 13**

On considère les intégrales :

$I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$  et  $J_n = \int_0^1 t^2 (1-t^2)^n dt$ .

$\forall n \in \mathbb{N}^*$

- 1) Exprimer  $I_{n+1}$  en fonction de  $I_n$  et  $J_n$ .
- 2) Montrer à l'aide d'une intégration par parties qu'on a :  $I_{n+1} = 2(n+1)J_n$ .
- 3) Etablir alors une relation entre  $I_n$  et  $I_{n+1}$ .
- 4) En déduire  $I_n$  en fonction de  $n$

**Exercice 14 :**

Soit  $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^2 x dx$  et  $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin^2 x dx$

Calculer  $J + K$  et  $J - K$ .

En déduire les valeurs de  $J$  et  $K$ .

**Exercice 15 :**

On considère la courbe  $\zeta : y = \frac{-x^3 + x}{x^2 + 1}$  dans un

repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (unité 4cm)

- 1) Etudier le comportement de  $\zeta$  +  $\infty$  et -  $\infty$ .
- 2) Déterminer l'aire, en  $cm^2$ , du domaine  $D$  compris entre  $\zeta$ , et les droites d'équations  $x = 2$ ,  $x = -2$  et  $y = -x$

**Intégrale 2**

**Exercice 1** Indiquer si elle est vraie ou fautive

1) Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$  telle que

pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,  $f(\frac{1}{2} + x) = f(\frac{1}{2} - x)$

- a) La courbe de  $f$  admet un centre de symétrie
- b) La courbe de  $f$  admet un axe de symétrie
- c) La courbe de  $f'$  coupe l'axe des abscisses au moins une fois.

$F$  une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  Alors :

- d)  $F(\frac{1}{2} + x) = F(\frac{1}{2} - x)$ , pour tout  $x$
- e) La courbe de  $F$  admet un point d'inflexion d'abscisse  $\frac{1}{2}$ .

2) Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0, \pi[$  par :

$$F(x) = \int_0^{2 \cos x} \frac{1}{\sqrt{4-t^2}} dt$$

- $F$  est dérivable sur  $]0, \pi[$
- $F$  est ni paire, ni impaire
- La courbe de  $F$  admet un centre de symétrie.
- La courbe de  $F$  admet un axe de symétrie.

**Exercice 2** Questions indépendantes

1) Soit  $f$  une fonction définie sur  $[0, +\infty[$ , continue, positive et décroissante. Démontrer que pour tout  $n > 0$  ;

$$\int_n^{n+1} f(t) dt \leq f(n) \leq \int_{n-1}^n f(t) dt$$

2) Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0, \pi]$  par

$$f(x) = \frac{\sin 2x}{1 + 2 \sin x}$$

Vérifier que  $f(\pi - x) = -f(x)$ . Dédurre  $\int_0^\pi f(x) dx$

3) Déterminer la limite :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^n \sin(\pi t)}{1-t} dt$

4) On considère la suite  $(I_n)$  définie sur  $\mathbb{N}^*$  par :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin x)^n}{\cos x} dx$$

Etablir une relation entre  $I_{n+2}$  et  $I_n$ . Etudier la convergence de la suite  $(I_n)$

5) Déterminer le domaine de définition de la fonction  $F : x \mapsto \int_{1-x}^{\sin(x)} \sqrt{x-t} dt$

6) Montrer que pour tout entier naturel  $n \geq 2$ , on a :

$$\int_0^{2\pi} |\sin(x)| dx = 2n$$

7)  $f$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ .

Déterminer la valeur moyenne de la fonction  $g : x \mapsto x^3 f(x^2)$  sur l'intervalle  $[-1, 1]$

**Exercice 3** Soit  $f$  une fonction continue sur  $[0, 1]$  et telle que pour tout réel  $x$  de  $[0, 1]$ ,  $\int_x^1 f(t) dt \geq \frac{1-x^2}{2}$

Soit  $F$  une primitive de  $f$  sur  $[0, 1]$ .

- 1) a) A l'aide d'une intégration par partie, montrer que :  $\int_0^1 x f(x) dx = F(1) + \int_0^1 F(x) dx$
- b) En déduire que  $\int_0^1 x f(x) dx \geq \frac{1}{3}$ .
- 2) a) Développer et réduire  $(f(x) - x)^2$ .
- b) Dédurre que  $\int_0^1 [f(x)]^2 dx \geq \frac{1}{3}$ .

**Exercice 4**

I/ Soit  $F$  définie sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$  par :  $F(x) = \int_0^{2 \sin x} \sqrt{4-t^2} dt$

- 1) Montrer que  $F$  est dérivable sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$  et calculer  $F'(x)$  pour tout réel  $x$  de  $[0, \frac{\pi}{2}]$ .
- 2) Expliciter alors  $F(x)$  pour tout réel  $x$  de  $[0, \frac{\pi}{2}]$ .

II/ Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = x + \sqrt{4-x^2}$

- 1) Etudier  $f$  et tracer la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$
- 2) Calculer en  $cm^2$  l'aire de la région du plan limitée par :  $(y=2)$  ;  $(x=0)$  ;  $(x=2)$  et  $C_f$ .
- 3) On considère le solide  $S$  obtenu en pivotant la courbe de  $f$  autour de l'axe des abscisse et limité par les plans  $(x=0)$  et  $(x=2)$ . Calculer en  $cm^3$  le volume de  $S$ . (unité 1 cm)

**Exercice 5**

On donne le tableau de variations d'une fonction  $f$  dérivable sur  $\mathbb{R}$  telle que  $f(0) = 0$

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$
Variations de $f$	$0$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
		$-1$	$2$	$1$	

On définit la fonction  $F$  définie par  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$

- 1) Etudier le sens de variations de  $F$ .
- 2) Montrer que  $F(2) \in [1, 4]$
- 3) Soit  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = \int_0^{x^2} f(t) dt$
- a) Dresser le tableau de variation de  $g$ .
- b) Montrer que la courbe de  $g$  admet une branche infinie que l'on précisera.
- c) Calculer la limite de  $F$  en  $+\infty$

