Mr : Chahed **Série (Intégrales)** **4eme math**

Exercice 1 :

Pour chacune des questions suivantes indiquer la bonne réponse :

1°/ Soit l'intégrale $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^2}\,dx$ alors :

a) $I < 0$ b) $I > 0$ c) $I = 0$.

2°/ Pour tout $x \in [-1{,}0]$ .On pose : $F(x) = \int_a^x \frac{1}{\sqrt{1+|t|}}\,dt$, $a \in]-1{,}0[$ .Alors :

$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ b) $F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ c) $F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} - \frac{1}{\sqrt{1-a}}$.

3°/ Soit f une fonction continue et croissante sur $[0,1]$ et $= \int_0^1 f(x)dx$. Alors :

a)$I > 0$ b) $f(1) \leq I \leq f(0)$ c) $f(0) \leq I \leq f(1)$.

Exercice 2 :

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse :

1°/ Si f est continue et positive sur $\mathbb{R}$ alors $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$: $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

2°/ Pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ on a : $\int_0^{\tan x} \frac{1}{1+t^2}\,dt = x$.

3°/ Si f est impaire , définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ alors $\int_{-1}^{1} x f'(x)\,dx = 0$.

4°/ a et $b \in \mathbb{R}$ et f est continue sur $\mathbb{R}$ si $\int_a^b f(x)dx = 0$ alors $a = b$.

5°/ Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a\ b]$ tel que $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$

Alors il existe $c \in [a\ b]$ tel que $f(c) = g(c)$

6°/ Soit f une fonction continue et croissante sur $\mathbb{R}$ alors

a) la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $I_n = \int_n^{n+1} f(x)dx$ est croissante

b) la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \int_0^n f(x)dx$ est croissante

7°/ Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et g la fonction définie par $g(x) = \int_0^x x f(t)dt$ Alors $g'(x) = x f(x)$

Exercice 3 :

La courbe $\mathcal{C}$ (annexe) est la représentation graphique dans un repère orthonormé de la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$

1) Soit F la fonction définie sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[= I$ par $F(x) = \int_1^{\tan^2(x)} f(t)dt$

a) Montrer que F est dérivable sur I et calculer $F'(x)$

b) En déduire que pour tout $x \in I$ on a : $F(x) = 2(x - \frac{\pi}{4})$

2) Soit $t > 0$ *et* D_t le domaine du plan délimité par $\mathcal{C}$ les droites d'équations respectives

$x = 1$, $x = t$ et $y = 0$ et soit $\mathcal{A}(t)$ la mesure de aire exprimé en unité d'aire.

Hachurer D_3 et $D_{\frac{1}{3}}$ puis calculer $\mathcal{A}(3)$et $\mathcal{A}(\frac{1}{3})$

3) a) Montrer que pour tout $t \in [1$ [illegible] l'équation [illegible] admet une unique solution sur$\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$

b) Montrer que $\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}(\frac{1}{t})$ (on pourra remarquer que $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x}$)

c) Montrer que $\lim_{t\to+\infty} 2\mathcal{A}(t) = \pi$. Interpréter graphiquement ce résultat

Exercice 4:

Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $U_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx$

1)a) Calculer U_1

b) Vérifier que $\forall\, x \in [0,1]$ on a : $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq 1$ puis déduire un encadrement de u_0

2)a) Montrer que (U_n) est décroissante minorée

b) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ on a : $\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$ puis déduire la limite de (u_n)

3) Pour tout entier $n \geq 3$ on pose $I_n = \int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1+x^2}dx$

a) Vérifier que pour tout $n \geq 3$ on a : $U_n + U_{n-2} = I_n$

b) Par une intégration par partie pourtant sur I_n . Montrer que pour tout $n \geq 3$ on a :

$(n-1)I_n + U_n = \sqrt{2}$ Puis déduire que $nU_n + (n-1)U_{n-2} = \sqrt{2}$

c) En déduire que pour tout $n \geq 3$ on a $(2n-1)U_n \leq \sqrt{2}$ puis déterminé la limite de $n(U_n)$

Exercice 5:

Soit (I_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $I_0 = \int_0^1 \sqrt{t}\,dt$ et $I_n = \int_0^1 (1-t)^n\sqrt{t}\,dt$ $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$

1/ a) Calculer I_0

b) Montrer que (I_n) est décroissante minorée

c) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ .En déduire la limite de (I_n)

2/ Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ on a : $I_n = \frac{2n}{2n+3}I_{n-1}$ puis exprimer I_n en fonction de n

3/ Soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $G(x) = \int_0^{x^2}(1-t)^n\sqrt{t}\,dt$

a) Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}_+$ on a : $G(x) = \int_0^x 2t^2(1-t^2)^n\,dt$ puis déduire que $I_n = \int_0^1 2t^2(1-t^2)^n\,dt$

b) à l'aide d'une intégration par partie montrer que $I_n = \frac{1}{n+1}\int_0^1 (1-t^2)^{n+1}\,dt$

c) En déduire alors que $\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k \frac{(-1)^k}{2k+1} = (n+1)I_n$

Exercice 6

Soit (I_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $I_0 = \int_0^1 \sqrt{2-t}\,dt$ $I_n = \frac{1}{2^n}\int_0^2 t^n\sqrt{2-t}\,dt$ $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$

1. a. Calculer I_0

b. Montrer que (I_n) est décroissante minorée

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $0 \leq I_n \leq \frac{2\sqrt{2}}{n+1}$ puis déduire la limite de I_n

3.a . Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $I_n = \frac{2n}{2n+3}I_{n-1}$ puis exprimer I_n en fonction de n

Exercice 7 :

Soit f la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par : $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$.

1°/ a)Etudier la dérivabilité de f à droite en 1 et interpréter graphiquement le résulta

b) Dresser le tableau de variati

2°/ a)Montrer que f réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Expliciter $f^{-1}(x)$, $\forall\, x \in J$.

c)Construire C_f et $C_{f^{-1}}$ dans un $R.O.N.$ unité graphique 2 cm .

3°/ Soit A l'aire de la partie limiter par C_f et les droites d'équation $= 0$, $x = 1$ et $x = 2$.

Montrer que $A = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} (2 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}})dx$

4°/ Soit $F(x) = \int_0^{\sin x} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}[= I$.

a) Montrer que F est dérivable sur I et calculer $F'(x)$.

b) En déduire l'expression de $F(x)$, puis calculer A.

5°/ Soit $C = \{M(x, f(x)), x \in [1,2]\}$ et S le solide obtenue en tournant C autour de l'axe des abscisses .Calculer le volume de S.

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ et C_f sa courbe représentative dans le plan rapporté a un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1.a. Etudier f et tracer C_f

b. Calculer l'aire de la partie limiter par C_f et les droites d' équation $y = 0$, $x = 0$ et $x = 1$.

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ et F la fonction définie sur $I = \left]-\frac{\pi}{2} \frac{\pi}{2}\right[$

Par $F(x) = \int_0^{\tan(x)} g(x)dx$

a. Montrer que F est dérivable sur I et calculer $F'(x)$ puis déduire que $F(x) = \tan(x) - x$

b. Soit $C = \{M(x, f(x)), x \in [0,1]\}$ et S le solide obtenue en tournant C autour de l'axe des abscisses .

Calculer le volume de S.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{k^2+n^2}$

a. Etudier les variations de g

b. Montrer que pour tout $\in$ $\{0, 1, 2, \ldots\ldots\ldots n-1\}$, on a $\frac{1}{n} g\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} g(x)dx \leq \frac{1}{n} g\left(\frac{k+1}{n}\right)$

c. En déduire que $1 - \frac{\pi}{4} \leq S_n \leq 1 - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2n}$ puis déduire la limite de S_n

Exercice 9 :

Soit f la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{\sqrt{x} - 1}$

1°/ a)Etudier la dérivabilité de f à droite en 1 et interpréter graphiquement le résulta

b) Dresser le tableau de variation de f. et tracer C_f

2) Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$

a) Déterminer l'expression analytique de R

b) Déterminer une équation de $C' = R(C_f)$ et construire dans le même repère

3) Calculer l'aire de la partie du plan limité par C_f et les droites $y = 0$, $x = 1$ et $x = 4$

Exercice 10 :

On pose $J=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\sin(\pi t)}{1-t}dt$ et on considère les suites (u_n) et (r_n) définie sur $\mathbb{N}$ par

$u_n=\int_0^{\frac{1}{2}}t^n\sin(\pi t)dt$ et $r_n=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{t^n\sin(\pi t)}{1-t}dt$ et soit $s_n=\sum_{k=0}^{n-1}u_k$

1) a) Montrer que $J=s_n+r_n$

b) Montrer que $r_n\leq\frac{1}{2^n(n+1)}$ puis déduire la limite de s_n

2) Calculer u_0 et u_1.

3) a) Montrer que pour tout entier naturel $n\geq 0$, $u_n=\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{n}{2^{n-1}}-n(n-1)u_{n-2}\right)$.

b) En utilisant les résultats précédents, donner une valeur approchée de J à 10^{-2} prés.

Exercice 11:

1°/ soit (I_n)la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $I_0=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dt$:$I_n=\int_0^1x^n\sqrt{1-x^2}\,dx$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Déterminer I_0 et vérifier que $I_1=\frac{1}{3}$.

Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on a : $I_{n+1}=\frac{n}{3+n}I_{n-1}$.

Calculer I_2 et I_3 .

2°/ a) Montrer que (I_n) est décroissante et minorée par 0 .

b)Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$ on a : $0\leq I_n\leq\frac{1}{n+1}$ .En déduire la limite de (I_n) .

c)Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*:1\leq\frac{I_n}{I_{n+1}}\leq\frac{3+n}{n}$ .En déduire la limite de $\frac{I_n}{I_{n+1}}$.

Exercice 12:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{3}{3+x^2}$ et C_f sa courbe représentative dans le plan rapporté a un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1.. Etudier f et tracer C_f

2. Soit F et G les fonctions définies sur $I=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ par

Par $F(x)=\int_0^{\sqrt{3}\tan(x)}f(t)dt$ et $G(x)=\int_0^{\sqrt{3}\tan(x)}(f(t))^2dt$

a. Montrer que F et G sont dérivable sur I et calculer $F'(x)$ et $G'(x)$

b. En déduire que $F(x)=\sqrt{3}x$ et $G(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}(2x+\sin(2x))$

c. Calculer l'aire de la partie limiter par C_f et les droites d'équation $y=0$, $x=0$ et $x=1$.

d. Soit $C=\{M(x,f(x)),x\in[0,1]\}$ et S le solide obtenue en tournant C autour de l'axe des abscisses .

Calculer le volume de S.

e . Montrer que $\lim_{x\to+\infty}\int_3^x f(t)dt=\int_0^1 f(t)dt$ interpréter graphiquement le résultat

3. Soit $n\in\mathbb{N}$, $S_n=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{-1}{3}\right)^k\frac{1}{2k+1}$ et $R_n=\int_0^1 t^{2n+2}f(t)dt$

a. Montrer que $f(t)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^{2k}+\left(\frac{-1}{3}\right)^{n+1}t^{2n+2}f(t)$.

b. En déduire que $S_n+\left(\frac{-1}{3}\right)^{n+1}R_n=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$

c. Montrer que $0 \leq R_n \leq \frac{1}{2n+3}$ puis déduire la limite de S_n *

Exercice 13

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{1+x^4}$ et C_f sa courbe représentative dans le plan rapporté a un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1.. Etudier f et tracer C_f

2. Soit F la fonction définie sur $I = \left[0.\frac{\pi}{2}\right[$ Par $F(x) = \int_0^{\sqrt{\tan(x)}} f(t)dt$

a. Montrer que F est continue sur I et calculer

b. Montrer que F est dérivable sur $\left]0.\frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $F'(x)$ puis déduire l'expression de F

C. Calculer l'aire de la partie limiter par C_f et les droites d' équation $y = 0$, $x = 0$ et $x = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$.

3.a. Montrer que pour tout $t \in [0,+\infty[$ on a $1 - t^4 \leq \frac{1}{1+t^4} \leq 1$

b. En déduire que que pour tout $x \in [0,+\infty[$ on a $\frac{1}{2}tan(x) - \frac{1}{6}tan^3(x) \leq F(x) \leq \frac{1}{2}tan(x)$

c. Montrer alors que F et dérivable a droite en 0 et calculer $F'_d(0)$

Exercice 14

Soit h la fonction définie sur $[-1,1]$ par $h(x) = (1-x^2)\sqrt{1-x^2}$ et C_h sa courbe représentative dans le plan rapporté a un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1.a. Etudier la dérivabilité de h a droite en -1 et a gauche en 1

b. Dresser le tableau de variation de h et tracer C_h

2. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = \int_{-1}^{1} 1\, dx$ $u_n = \int_{-1}^{1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^n dx \; \forall n \in \mathbb{N}^*$

a. Calculer u_0 , u_1 et u_2

b. Montrer que pour tout $n \geq 2$ on a $u_n = \frac{n}{n+1}u_{n-2}$

3. Soit (a_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $a_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$

a. Montrer que pour tout $n \geq 1$ on a $u_{2n-1} = \pi a_n$ et $u_{2n} = \frac{2}{(2n+1)a_n}$

b. Montrer que (u_n) est décroissante minorée

c. Montrer que pour tout $n \geq 1$ on a $\frac{2}{\pi} \leq (2n+1){a_n}^2 \leq \frac{2n+2}{2n+1}\frac{2}{\pi}$

d. En déduire la limite (a_n) et la limite (u_n)

Exercice 15:

Pour tout $k \in IN$ on définie les suites $I_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k}(t)dt$ et $J_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2k}(t)dt$.

1°/a) Calculer I_0 et J_0.

b) Montrer $\forall k \in IN^*$ on a $I_k = \frac{2k-1}{2k} I_{k-1}$.puis déduire I_k en fonction de k

c)Montrer que (I_k) est décroissante et minorée, conclure.

2°/ A l'aide de deux intégrations par partie porter sur I_k montrer que $\forall k \in IN^*$

$$I_k = -2k^2 J_k + k(2k-1)J_{k-1}$$

3°/Soit $k \in IN$, $w_k = \frac{J_k}{I_k}$ et $S_n = \left(1 + \frac{1}{2^2} + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + \frac{1}{n^2}\right)$.

a) Montrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ $on\ a\ x \leq \frac{\pi}{2} sinx$ puis que $0 \leq J_k \leq \frac{\pi^2 I_k}{8(k+1)}$

b) Montrer que $S_n = 2(w_0 - w_n)$. et que $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 0$, puis que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 16:

On donne ci-dessous le tableau de variation d'une fonction f continue sur $\mathbb{R}$ et tel que $f(1) = 0$

x	$-\infty$		-4		2		$+\infty$
f'		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$	1	↗	3	↘	-5	↗	-1

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \int_1^x f(t)dt$

1. Etudier les variations de F
2. Etudier le singe de $F(x)$
3. Déterminer la limite de F en $+\infty$ et en $-\infty$