Lycée Pilote Sfax A/S : 2020-2021	**Série N°23** (Intégrales)	4ème Math Mr Jellali

Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \int_{-1}^{0} \frac{(x+1)^n}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx$.

1) Calculer u_1.

2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $u_{n+2} = \frac{\sqrt{2}}{n+2} - \frac{n+1}{n+2} \times u_n$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 2

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^{2n+1}(x)}$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2(x)}{\cos^{2n+1}(x)}\,dx$

① a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n - I_{n-1} = J_n$.

b) En déduire la monotonie de la suite (I_n).

② a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \frac{2^n}{\sqrt{2}} - (2n-1)J_n$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2n\,I_n = (2n-1)I_{n-1} + \frac{2^n}{\sqrt{2}}$.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \geq \frac{2^{n-1}}{\sqrt{2}\,n}$.

d) Montrer que pour tout $n \geq 4$, $2^n \geq n^2$.

e) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

Exercice 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{\cos^2 t}{n^2}}\,dt$.

1) Calculer U_1.

2)a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{\pi}{2}\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} \leq U_n \leq \frac{\pi}{2}$.

b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

3) Calculer l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt$ et prouver que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t\,dt = \frac{3\pi}{16}$.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V_n = n^2\left(\frac{\pi}{2} - U_n\right)$.

a) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+\sqrt{1-x}} \leq \frac{1}{2} + \frac{x}{2}$.

b) En déduire que pour tout $x \in [0,1]$, $1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} \leq \sqrt{1-x} \leq 1 - \frac{x}{2}$.

c) Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|V_n - \frac{\pi}{8}\right| \leq \frac{3\pi}{32n^2}$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n$.