Lycée Pilote Sfax	**Série N°24**	$4^{ème}$ Math
A/S : 2020-2021	(Intégrales)	Mr Jellali

Exercice 1

1. Soit f la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ par $f(x)=\tan(x)$.

   a. Montrer que f réalise une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ sur $[0,1]$.

   b. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $[0,1]$ et calculer $\left(f^{-1}\right)'(x)$.

2. Soit $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$ et on pose $I_n=\int_0^1\frac{t^{n-1}}{1+t^{2n}}dt$.

   a. On pose pour tout $t\in[0,1]$, $\varphi(t)=f^{-1}\left(t^n\right)$. Montrer que φ est dérivable sur $[0,1]$ et calculer $\varphi'(t)$.

   b. En déduire I_n en fonction de n.

3. Soit $J_n=\int_0^1\frac{t^{3n-1}}{\left(1+t^{2n}\right)^2}dt$ avec $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$.

   Montrer que $J_n=\frac{-1}{4n}+\frac{1}{2}I_n$. En déduire la valeur de $A=\int_0^1\frac{t+2t^5}{\left(1+t^4\right)^2}dt$.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $[1,+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{x^3}$. On pose pour tout entier $n\geq 1, S_n=\sum_{k=1}^{n}f(k)$.

1) Montrer que la suite (S_n) est croissante.

2) Calculer $\int_1^n f(t)dt,\ n\geq 1$ et vérifier que $0\leq\int_1^n f(t)dt\leq\frac{1}{2}$.

3)a) Montrer que pour tout entier $k\geq 2$, $\int_k^{k+1}f(t)dt\leq f(k)\leq\int_{k-1}^{k}f(t)dt$.

b) En déduire que pour tout entier $n\geq 1$, $\int_2^{n+1}f(t)\,dt\leq S_n-f(1)\leq\int_1^n f(t)\,dt$.

c) Montrer que pour tout entier $n\geq 1$, $1\leq S_n\leq\frac{3}{2}$.

d) En déduire que la somme $1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{n^3}$ converge et donner un encadrement de sa limite.

Exercice 3

Soit (I_n) la suite définie par $I_0=\int_0^1\sqrt{1-x}\,dx$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$; $I_n=\int_0^1\sqrt{x^n(1-x)}\,dx$.

1) Calculer I_0.

2) Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x)=\sqrt{x(1-x)}$. (C) la courbe de f dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

a) Montrer que (C) est un demi-cercle dont on précisera le centre et le rayon.

b) En déduire que $I_1=\frac{\pi}{8}$.

3) Montrer que (I_n) est décroissante.

4)a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $I_{n+2}=\frac{n+2}{n+5}I_n$.

b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $I_n>0$.

5)a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $I_nI_{n+1}\ \frac{2\pi}{(n+2)(n+3)(n+4)}$.

b) En déduire la limite de $(I$