Lycée Pilote Sfax A/S : 2020-2021	**Série N°26** (Intégrales)	4 ème Math Mr Jellali

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $[-1,+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{1+x^3}$.

Soit F la primitive de f sur $[-1,+\infty[$ qui s'annule en 1. On pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $I_n=\int_0^1 x^n F(x)\,dx$.

1. Calculer $\int_0^1 x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$. En déduire la valeur de I_1 .
2. Montrer que F est strictement croissante sur $[-1,+\infty[$. En déduire le signe de $F(x)$ pour $x\in[-1,+\infty[$.
3. Montrer que la suite (I_n) est croissante. En déduire qu'elle est convergente.
4. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{F(0)}{n+1}\le I_n\le 0$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x)=\frac{2\sqrt{x}}{1+x}$.

On désigne par (C) la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. $\left(\|\vec{i}\|=2cm\right)$.

1) Dresser le tableau de variation de f et tracer (C).

2) Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ et G la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par $G(x)=F(\tan^2 x)$

a) Montrer que G est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et que pour tout $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, $G'(x)=4\tan^2 x$.

b) Exprimer G(x) en fonction de x.

c) Calculer $J=\int_0^1 f(t)dt$.

d) Déterminer alors l'aire $\mathscr{A}$ en cm² de la partie du plan limitée par (C) et les droites $x=0$, $x=1$ et $y=0$.

3) On pose $S_n=\frac{2}{\sqrt{n}}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{\sqrt{k}}{n+k}$ avec $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Montrer que pour tout $k\in\{0,1,2,\dots,n-1\}$ on a $\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\le\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt\le\frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right)$.

b) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on a $J\le S_n\le J+\frac{1}{n}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Exercice 3

I) Soit F la fonction définie sur $[0,2]$ par $F(x)=\int_0^x 2\sqrt{2t-t^2}\,dt$ et G la fonction définie sur $[0,\pi]$ par $G(x)=F(1+\cos x)$.

1) Montrer que **G** est dérivable sur $[0,\pi]$ et calculer $G'(x)$.

2) En déduire que $G(x)=\frac{1}{2}\sin 2x-x+\pi\quad\forall x\in[0,\pi]$.

II) Soit (I_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $I_0=\int_0^2 2\sqrt{2x-x^2}\,dx$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $I_n=\int_0^2 2x^n\sqrt{2x-x^2}\,dx$.

1) Calculer I_0-I_1 .En déduire I_1 .

2)a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,on a $I_n-I_{n+1}=\int_0^2 x^n(2-2x)\sqrt{2x-x^2}\,dx$.

b) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$,on a $I_{n+1}=\left(\frac{2n+3}{n+3}\right)I_n$.

3) Montrer que (I_n) est croiss[...] $\ge$ [...] Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

موقع مراجعة باكالوريا
BAC.MOURAJAA.COM
bac Math