Exercice

Soit f la fonction définie suir $]0,+\infty[$ par $f(x)=x+\ln x$

$(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} (f(x)-x)$.

b) Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

c) Etudier la position relative de $(\mathscr{C}_f)$ par rapport à la droite $\Delta : y=x$.

2) a) Dresser le tableau de variation de f .

b) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation.

3) a) Déterminer $f(1)$ et $f(e)$ puis construire les courbes $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_{f^{-1}})$ dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

b) Calculer l'aire $\mathscr{A}$ du domaine du plan limité par $(\mathscr{C}_{f^{-1}})$ et les droites $y=x$; $x=1$ et $x=e+1$.

4) a) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f(x)=n$ admet dans $]0,+\infty[$ une unique solution x_n .

b) Déterminer la valeur de x_1 .

c) Montrer que la suite (x_n) , $n\in\mathbb{N}^*$, est strictement croissante et non majorée puis en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$

5) a) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \le n$.

b) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n-\ln n \le x_n$.

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n-x_n}{n}\right)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{x_n}{n-\ln n}\right)$.