Lycée pilote de Tunis	Fonctions logarithmes 1	Terminales maths
Mr Ben Regaya. A	+ éléments de corrections	www.ben-regaya.net

Exercice 1

1. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{x}\,\ln\left(\frac{x+1}{x}\right),\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x},\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x},\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x},\ \lim_{x\to+\infty} x-\ln\left(x^2+1\right),\ \lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{2x+1}{2x+3}\right)$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$\ln(x+1)+\ln(x+3)=\ln(x-4) \qquad 2\ln(x-2)=\ln(x+3) \qquad (\ln(x))^2-3\ln(x)+2=0$$

$$(\ln(x))^3-\ln(x)=0.$$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$\ln\left(x^2-x\right)+\ln\left(\frac{1}{3x+4}\right)\prec 0\ ,\quad \ln(x)-2\geq\frac{4}{\ln x}\quad ,\quad \ln(x)\succ\ln 2-1\quad ,\quad 3\ln(x-1)\leq\ln(x-1)$$

Exercice 2

1. Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x)=x^3-1+2\ln x$.

   a) Etudier les variations de g. Calculer $g(1)$.

   b) En déduire le signe de $g(x)$ pour $x\succ 0$.

2. Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=x-1-\dfrac{\ln x}{x^2}$.

   a) Etudier les variations de f sur $]0,+\infty[$.

   b) Montrer que la droite $D: y=x-1$ est une asymptote à la courbe ξ de f, dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, au voisinage de $+\infty$.

   c) Montrer qu'il existe un point A de ξ où la tangente à ξ est parallèle à D. Tracer ξ et D.

Exercice 3

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel n non nul, par :

$$u_1=1\,,\ u_n=u_{n-1}+\frac{1}{n}\ \text{pour}\ \ n\geq 2\ \text{ et }\ v_n=u_n-\ln n\ \text{ pour }\ n\geq 1.$$

1. a) Calculer u_2, u_3 et u_4.

   b) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul : $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

2. a) Montrer que, pour tout entier naturel k non nul : $\dfrac{1}{k+1}\leq\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,dx\leq\frac{1}{k}$

   b) En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a les inégalités suivantes :

   $$u_n-1\leq\ln n\leq u_n-\frac{1}{n}\ \text{ et }\ 0\prec v_n\leq 1$$

3. a) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul : $v_{n+1}-v_n=\dfrac{1}{n+1}-\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{1}{x}\,dx$.

   b) En déduire le sens de variations de la suite (v_n).

4. Montrer que la suite (v_n) converge. On note γ la limite de la suite (v_n) (on ne cherchera pas à calculer γ).

   Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{1+4x^2}}$ et F la primitive sur $\mathbb{R}$ de f qui s'annule en 0.

1. a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}_+$ on a : $F(x)\geq ln(2x+1)$.

   En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

   b) Montrer que F est impaire et calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$.

2. Soit G la fonction définie par $G(x)=ln\left(2x+\sqrt{1+4x^2}\right)$; $x\in\mathbb{R}$.

   a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a $G(x)=F(x)$.

   b) Montrer que F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

3. Déterminer la primitive H sur $\mathbb{R}$ de la fonction : $x\mapsto\dfrac{3x+5}{\sqrt{1+4x^2}}$ telle que $H(0)=\dfrac{3}{4}$.

Exercice 5

1. Etudier les variations de la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=x-1-lnx$.
2. En déduire que pour tout $x\succ 0$ on a : $lnx\leq x-1$.
3. Soient $x_1,x_2,x_3...x_n$; n nombres strictement positifs non tous égaux à 1.

   On pose $u_k=\dfrac{x_k}{M}$; $k=1,2,3,...,n$ avec $M=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}x_k$.

   a) Montrer qu'on a $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}ln(x_k)\leq ln\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k)\right)$

   b) En déduire que $\sqrt[n]{x_1.x_2.x_3....x_n}\leq\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}x_k$ et que $n!\leq\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$.

Exercice 6

1. Etablir que pour tout $x\geq 0$ on a : $x-\dfrac{x^2}{2}\leq ln(x+1)\leq x$.

2. Soit la suite (u_n) définie par : $u_n=\sum\limits_{k=1}^{n}ln\left(1+\dfrac{k}{n^2}\right)$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

   a) Calculer u_1 et u_2.

   b) Montrer que pour tout $n\geq 1$ on a : $\sum\limits_{k=1}^{n}k^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

   c) Montrer que la suite (u_n) est convergente.

3. Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $v_n=\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{3}{n^2}\right)...\left(1+\dfrac{n}{n^2}\right)$.

   Montrer que (v_n) est convergente et calculer sa limite.

Lycée pilote de Tunis	Fonctions logarithmes 1	Terminales maths
Mr Ben Regaya. A	éléments de corrections	www.ben-regaya.net

Exercice 1

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\, ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\sqrt{x}ln(x+1) - \sqrt{x}\,ln(x)\right)$

On a : $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}ln(x+1) = 0$ et $\sqrt{x}ln(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{x}\,ln\left(\sqrt{x}\right)$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x\,ln(x) = 0$ donc par composée $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\,ln\left(\sqrt{x}\right) = 0$. Ainsi $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\,ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) = 0$

Pour $x \neq 0$; $\dfrac{ln(cosx)}{x} = \dfrac{ln(cosx) - ln(cos0)}{x-0}$ et on pose $f(x) = ln(cosx)$

La fonction cosinus est dérivable en 0 et la fonction logarithme est dérivable en 1 donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = -tan(0) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ln(cosx)}{x} = 0$.

ou bien : pour $x \neq 0$; $\dfrac{ln(cosx)}{x} = \dfrac{ln(cosx)}{cos(x)-1} \times \dfrac{cos(x)-1}{x}$

On a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{cos(x)-1}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to 0} cosx = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ln(x)}{x-1} = 1$ donc par composée $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ln(cosx)}{cos(x)-1} = 1$. Ainsi $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ln(cosx)}{x} = 0$.

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ln(x^2+1)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ avec $f(x) = ln(x^2+1)$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$f'(x) = \dfrac{2x}{1+x^2} \Rightarrow f'(0) = 0$. Donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ln(x^2+1)}{x} = 0$.

Ou bien : pour $x \neq 0$; $\dfrac{ln(x^2+1)}{x} = \dfrac{ln(x^2+1)}{x^2} \times x$

$\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ln(x+1)}{x} = 1$ donc par composée $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ln(x^2+1)}{x^2} = 1$ et par produit $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ln(x^2+1)}{x} = 0$.

Pour $x \succ 0$; $\dfrac{ln(x^2+1)}{x} = \dfrac{ln(x^2) + ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}{x} = \dfrac{ln(x^2)}{x} + \dfrac{ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}{x} = 2\dfrac{ln(x)}{x} + \dfrac{ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}{x}$

on a : $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{ln(x)}{x} = 0$ donc par somme $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{ln(x^2+1)}{x} = 0$.

Pour

$x \succ 0$; $x - ln(x^2+1) = x - ln(x^2) - ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) = x - 2ln(x) - ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) = x\left(1 - 2\dfrac{ln(x)}{x}\right) - ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$

$\lim\limits_{x\to +\infty} ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{ln(x)}{x} = 0$ donc par produit et somme $\lim\limits_{x\to +\infty} x - ln(x^2+1) = +\infty$.

Pour $x \succ 0$; $x\,ln\left(\frac{2x+1}{2x+3}\right) = x \times \frac{ln\left(\frac{2x+1}{2x+3}\right)}{\frac{2x+1}{2x+3}-1} \times \left(\frac{2x+1}{2x+3}-1\right) = \frac{ln\left(\frac{2x+1}{2x+3}\right)}{\frac{2x+1}{2x+3}-1} \times \left(\frac{-2x}{2x+3}\right)$.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-2x}{2x+3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-2x}{2x} = -1$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{2x+3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x}{2x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to1} \frac{lnx}{x-1} = 1$ donc par composée $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{ln\left(\frac{2x+1}{2x+3}\right)}{\frac{2x+1}{2x+3}-1} = 1$ et par produit

$\lim\limits_{x\to+\infty} x\,ln\left(\frac{2x+1}{2x+3}\right) = -1$.

2. $ln(x+1)+ln(x+3)=ln(x-4)$. Il faut que $x+1 \succ 0; x+3 \succ 0$ et $x-4 \succ 0$; soit $x \in \left]-1,+\infty\right[$.

On a donc $ln(x+1)+ln(x+3)=ln(x-4) \Leftrightarrow ln\left[(x+1)(x+3)\right]=ln(x-4) \Leftrightarrow x^2+4x+3=x-4$

Car la fonction ln est une bijection sur $\left]0,+\infty\right[$.

$\Leftrightarrow x^2+3x+7=0$ et on a $\Delta \prec 0$ donc pas de solution.

$2ln(x-2)=ln(x+3)$ cette équation est définie lorsque $x-2 \succ 0$ et $x+3 \succ 0$ signifie $x \in \left]2,+\infty\right[$.

$2ln(x-2)=ln(x+3) \Leftrightarrow ln(x-2)^2=ln(x+3) \Leftrightarrow x^2-4x+4=x+3 \Leftrightarrow x^2-5x+1=0$. On a donc

$x_1=\frac{5-\sqrt{21}}{2}$ et $x_2=\frac{5+\sqrt{21}}{2}$ et comme $x \in \left]2,+\infty\right[$ alors la seule solution qui convient est $x_2=\frac{5+\sqrt{21}}{2}$.

$(ln(x))^2-3ln(x)+2=0$ .Cette équation est définie lorsque $x \succ 0$

$(ln(x))^2-3ln(x)+2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t^2-3t+2=0 \\ t=lnx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \;\; ou \;\; t=2 \\ t=lnx \end{cases} \Leftrightarrow lnx=1$ ou $lnx=2 \Leftrightarrow x=e$ ou

$x=e^2$. on prend les deux valeurs obtenues.

$(ln(x))^3-ln(x)=0$. Cette équation est définie lorsque $x \succ 0$

$(ln(x))^3-ln(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t^3-t=0 \\ t=ln(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t(t^2-1)=0 \\ t=ln(x) \end{cases}$. Ainsi $lnx=1$ ou $lnx=0$ ou $lnx=-1 \Leftrightarrow$

$x=e$ ou $x=1$ ou $x=\frac{1}{e}$ et les trois réels sont des solutions.

3. $ln(x^2-x)+ln\left(\frac{1}{3x+4}\right) \prec 0$. Cette inéquation est définie lorsque $x^2-x \succ 0$ et $\frac{1}{3x+4} \succ 0$ et $3x+4 \neq 0$

Soit donc $x \in \left]-\frac{4}{3},0\right[\cup \left]1,+\infty\right[$.

$ln(x^2-x)+ln\left(\frac{1}{3x+4}\right) \prec 0 \Leftrightarrow ln(x^2-x)-ln(3x+4) \prec 0 \Leftrightarrow ln(x^2-x) \prec ln(3x+4)$

$\Leftrightarrow x^2-x \prec 3x+4$ Car la fonction ln est une bijection strictement croissante sur $\left]0,+\infty\right[$.

$\Leftrightarrow x^2-4x-4 \prec 0$.

L'ensemble des solutions est $\left]2-2\sqrt{2},0\right[\cup \left]1,2+2\sqrt{2}\right[$.

Exercice 2

1. a) g est somme de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ donc elle est dérivable sur cet intervalle et

$$g'(x)=3x^2+\frac{2}{x}\succ 0;\ \ \forall x\succ 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} x\left(x^2-\frac{1}{x}+2\frac{lnx}{x}\right)=+\infty \text{ et } \lim_{x\to 0^+} g(x)=-\infty$$

g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

$g(1)=0$.

b) g est strictement positive sur $]1,+\infty[$ et strictement négative sur $]0,1[$.

2. a) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=x-1-\dfrac{lnx}{x^2}$.

f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $f'(x)=1-\dfrac{x^2\times\frac{1}{x}-2xlnx}{x^4}=1-\dfrac{1-2lnx}{x^3}=\dfrac{x^3-1+2lnx}{x^3}=\dfrac{g(x)}{x^3}$.

Le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$ sur $]0,+\infty[$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x-1-\frac{lnx}{x^2}=+\infty \text{ car } \lim_{x\to+\infty}\frac{lnx}{x^2}=0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x-1-\frac{lnx}{x^2}=+\infty .$$

x	0		1		$+\infty$
f'(x)		−	0	+	
f(x)	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

b) Montrons que la droite $D: y=x-1$ est une asymptote à la courbe ξ de f.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x-1)=\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{lnx}{x^2}=0$ donc la droite $D: y=x-1$ est une asymptote à la courbe ξ de f au voisinage de $+\infty$.

c) Montrons qu'il existe un point A de ξ où la tangente à ξ est parallèle à D.

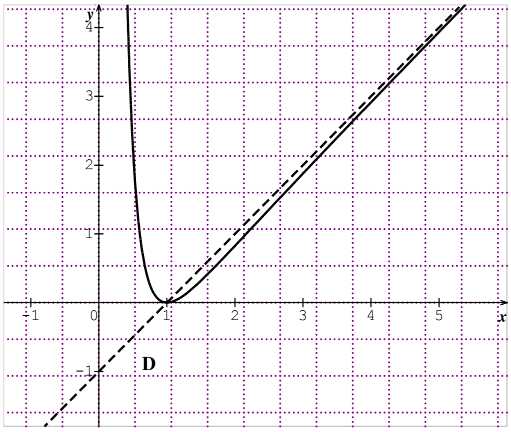
Le coefficient directeur de D est 1, donc

l'abscisse du point est solution de l'équation $f'(x)=1$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^3-1+2lnx}{x^3}=1\Leftrightarrow x^3-1+2lnx=x^3\Leftrightarrow -1+2lnx=0\Leftrightarrow lnx=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=\sqrt{e}$. Ainsi A est le point de ξ d'abscisse $\sqrt{e}$ et $f\left(\sqrt{e}\right)=\sqrt{e}-1-\dfrac{ln\left(\sqrt{e}\right)}{e}=\sqrt{e}-1-\dfrac{\frac{1}{2}ln(e)}{e}=\sqrt{e}-1-\dfrac{1}{2e}$.

Finalement $A\left(\sqrt{e},\sqrt{e}-1-\dfrac{1}{2e}\right)$.

ξ admet les droites D et $x=0$ comme asymptote et une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point de coordonnées $(1,0)$.



Exercice 3

1. a) $u_1 = 1,\ u_2 = u_1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},\ u_3 = \frac{11}{6}, u_4 = \frac{25}{12}$

b) Par récurrence : $u_1 = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k} = 1$ qui est vrai;

supposons que $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Alors $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$. On a donc démontré par récurrence que pour tout naturel n non nul, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

2. a) Si, pour un naturel k non nul $\in [k, k+1]$, alors $k \le x \le k+1 \Leftrightarrow \frac{1}{k+1} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{k}$ (car tous ces termes sont strictement supérieurs à zéro) $\Rightarrow \int_k^{k+1} \frac{1}{k+1} dx \le \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \le \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dx$. (D'après la positivité de l'intégrale .) soit encore $\frac{1}{k+1} \le \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \le \frac{1}{k}$

b) En écrivant les encadrements précédents pour $k = 1,2,\ldots,n$, on obtient :

$$\frac{1}{2} \le \int_1^2 \frac{1}{x} dx \le \frac{1}{1}$$

$$\frac{1}{3} \le \int_2^3 \frac{1}{x} dx \le \frac{1}{2}$$

…… …… ….

$$\frac{1}{n} \le \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x} dx \le \frac{1}{n-1}$$

Soit en sommant membre à membre et pour les intégrales en utilisant la relation de Chasles :

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \le \int_1^n \frac{1}{x} dx \le 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1}$. soit : $u_n - 1 \le \ln n \le u_n - \frac{1}{n}$

De l'inégalité de gauche, on en déduit que $u_n - \ln n \le 1$ et de l'inégalité de droite $\frac{1}{n} \le u_n - \ln n$, soit $\frac{1}{n} \le v_n \le 1$. On a donc a fortiori $0 \prec v_n \le 1$.

c) Variation de (v_n) : on calcule $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - \ln(n+1) - u_n + \ln n = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx$ pour tout naturel n non nul.

Or d'après l'encadrement trouvé à la question 2. a), on a $\frac{1}{n+1} \leq \int_{n}^{n+1} \frac{1}{x} dx \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} - \int_{n}^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq 0$ ce qui montre que $v_{n+1} - v_n \leq 0$, c'est-à-dire que la suite (v_n) est décroissante

3. La suite (v_n) est donc décroissante et minorée par zéro : elle est donc convergente vers un nombre γ supérieur ou égal à zéro. Puisque $u_n = v_n + \ln n$ que $\lim_{n\to+\infty} v_n = \gamma$ et que $\lim_{n\to+\infty} \ln n = +\infty$, on obtient par somme $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. La suite (u_n) est donc divergente.

Exercice 4

1. a) Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ on a : $F(x) \geq \ln(2x+1)$.

Soit $\varphi(x) = F(x) - \ln(2x+1)$ pour $x \geq 0$.

On a φ est dérivable sur $[0,+\infty[$ et $\varphi'(x) = f(x) - \frac{2}{2x+1} = \frac{2}{\sqrt{1+4x^2}} - \frac{2}{2x+1} = \frac{4x+2-2\sqrt{1+4x^2}}{\sqrt{1+4x^2}(2x+1)}$

$= 2\frac{(2x+1)^2 - (1+4x^2)}{\sqrt{1+4x^2}(2x+1)(2x+1+\sqrt{1+4x^2})} = \frac{8x}{\sqrt{1+4x^2}(2x+1)(2x+1+\sqrt{1+4x^2})} \geq 0$ donc φ est strictement croissante sur $[0,+\infty[$ et $\varphi(0) = 0$ donc $\forall x \geq 0$ on a $\varphi(x) \geq 0$, donc $F(x) \geq \ln(2x+1)$.

Comme $\lim_{x\to+\infty} \ln(2x+1) = +\infty$ alors d'après le théorème de comparaison des limites on a $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$.

b) Montrons que F est impaire.

On a : F la primitive sur $\mathbb{R}$ de f qui s'annule en 0, donc $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ et comme f est paire alors

$\int_{-x}^{x} f(t)dt = 2\int_0^x f(t)dt \Leftrightarrow \int_{-x}^{0} f(t)dt + \int_0^x f(t)dt = 2\int_0^x f(t)dt$ relation de Chasles pour le calcul intégrale

$\int_{-x}^{x} f(t)dt = 2\int_0^x f(t)dt \Leftrightarrow \int_{-x}^{0} f(t)dt = \int_0^x f(t)dt \Leftrightarrow -\int_0^{-x} f(t)dt = \int_0^x f(t)dt$ et donc $-F(-x) = F(x)$ et F est impaire .

On a F est impaire donc pour $x \succ 0$, on pose $x = -t$ alors

$F(-t) \geq \ln(-2t+1) \Leftrightarrow -F(t) \geq \ln(-2t+1) \Leftrightarrow F(t) \leq -\ln(-2t+1)$.

$\lim_{t\to-\infty} -\ln(-2t+1) = -\infty$ donc par comparaison des limites $\lim_{t\to-\infty} F(t) = -\infty$

2. a) Montrons que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $G(x) = F(x)$.

On a $\sqrt{1+4x^2} \succ \sqrt{4x^2} = 2|x| \Rightarrow \sqrt{1+4x^2} + 2x \succ 2x + 2|x| \geq 0$ et donc $\sqrt{1+4x^2} + 2x \succ 0$

De plus la fonction $x \mapsto \sqrt{1+4x^2} + 2x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$;

$$G'(x) = \frac{2 + \frac{8x}{2\sqrt{1+4x^2}}}{2x + \sqrt{1+4x^2}} = \frac{\frac{2\sqrt{1+4x^2} + 4x}{\sqrt{1+4x^2}}}{2x + \sqrt{1+4x^2}} = \frac{2}{\sqrt{1+4x^2}} = f(x).$$

et comme $G(0) = 0$ alors $G(x) = \int_0^x f(t)dt$ et donc $G(x) = \int_0^x f(t)dt = F(x)$ pour tout réel x.

b) Montrons que F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On a, pour tout x réel, $F'(x)=f(x)$. F est dérivable donc continue et elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $F(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.

3. H est la primitive de $x\mapsto \dfrac{3x+5}{\sqrt{1+4x^2}}$ telle que $H(0)=\dfrac{3}{4}$.

Soit $h(x)=\dfrac{3x+5}{\sqrt{1+4x^2}}=\dfrac{3x}{\sqrt{1+4x^2}}+\dfrac{5}{\sqrt{1+4x^2}}=\dfrac{3}{8}\dfrac{8x}{\sqrt{1+4x^2}}+\dfrac{5}{2}\dfrac{2}{\sqrt{1+4x^2}}$

et donc $H(x)=\dfrac{3}{8}\times 2\sqrt{1+4x^2}+\dfrac{5}{2}F(x)+k, k\in\mathbb{R}$ soit encore : $H(x)=\dfrac{3}{4}\sqrt{1+4x^2}+\dfrac{5}{2}F(x)+k, k\in\mathbb{R}$.

$H(0)=\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow k=0$. Finalement $H(x)=\dfrac{3}{4}\sqrt{1+4x^2}+\dfrac{5}{2}F(x)$.

Exercice 5

1. $f(x)=x-1-lnx$; $x\succ 0$.

la fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $f'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$.

Pour $x\succ 0$; $f(x)=x\left(1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{lnx}{x}\right)$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to 0^+} ln(x)=-\infty$.

x	0		1		$+\infty$
f'(x)		$-$	0	$+$	
f(x)	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2. La fonction f admet un minimum absolu en 1 égal à 0 donc $\forall x\succ 0$, on a $f(x)\geq f(1)=0\Rightarrow f(x)\geq 0$ d'où $x-1-lnx\geq 0\Leftrightarrow lnx\leq x-1;\forall x\succ 0$

3. On pose $u_k=\dfrac{x_k}{M}$; $k=1,2,3,...,n$ avec $M=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}x_k$.

a) On a : $lnx\leq x-1$ et pour $x=u_k$ on a : $ln\left(\dfrac{x_k}{M}\right)\leq\dfrac{x_k}{M}-1$

Donc $ln(x_k)-ln\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}x_k\right)\leq\dfrac{x_k}{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}x_k}-1$

$\Rightarrow\sum\limits_{k=1}^{n}ln(x_k)-\sum\limits_{k=1}^{n}ln\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}x_k\right)\leq\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}x_k}{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}x_k}-n$. (**NB** : la somme $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}x_k$ ne dépend pas de k.)

$\Rightarrow\sum\limits_{k=1}^{n}ln(x_k)-n\times ln\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}x_k\right)\leq n-n=0\Rightarrow\sum\limits_{k=1}^{n}ln(x_k)\leq n\times ln\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}x_k\right)$. D'ou

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} ln\left(x_k\right) \le ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right).$$

b) d'après a) on a : $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}ln\left(x_k\right) \le ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} ln\left(\left(x_k\right)^{\frac{1}{n}}\right) \le ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)$ donc

$$ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(x_k\right)^{\frac{1}{n}}\right) \le ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right).$$

on applique la fonction $x \mapsto e^x$, strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on obtient : $\left(x_1.\, x_2.\, x_3....x_n\right)^{\frac{1}{n}} \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$ donc

$$\sqrt[n]{x_1.\, x_2.\, x_3....x_n} \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Pour $x_k = k$ on obtient:

$$\sqrt[n]{1\times 2\times 3\times ...\times n} \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k \Leftrightarrow \sqrt[n]{n!} \le \frac{1}{n}\,\frac{n(n+1)}{2} \Leftrightarrow \sqrt[n]{n!} \le \frac{(n+1)}{2} \Leftrightarrow n! \le \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

Exercice 6

1. Montrons que pour tout $x \ge 0$ on a : $x - \frac{x^2}{2} \le ln(x+1) \le x$.

   On a pour tout $t \ge 0$; $\frac{1}{1+t} \le 1$ et les deux fonctions sont continues sur $[0,+\infty[$ donc d'après la positivité de l'intégrale pour tout $x \ge 0$, $\int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt \le \int_0^x 1\,dt \Leftrightarrow \left[ln(1+t)\right]_0^x \le x \Leftrightarrow ln(1+x) \le x$ pour $x \ge 0$.

   On a aussi pour $t \ge 0$: $(1-t) - \frac{1}{1+t} = \frac{1-t^2-1}{1+t} = \frac{-t^2}{1+t} \le 0$ donc $1-t \le \frac{1}{1+t}$ pour $t \ge 0$ et les deux fonctions sont continues sur $[0,+\infty[$ donc d'après la positivité de l'intégrale pour tout

   $$x \ge 0, \int_0^x (1-t)\,dt \le \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt \Leftrightarrow \left[t - \frac{t^2}{2}\right]_0^x \le \left[ln(1+t)\right]_0^x \le x \Leftrightarrow x - \frac{x^2}{2} \le ln(1+x).$$

   On en déduit donc que pour tout $x \ge 0$ on a : $x - \frac{x^2}{2} \le ln(x+1) \le x$. (Bien sur on peut procéder autrement étude de fonctions par exemples.)

2. $u_n = \sum_{k=1}^{n} ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$

   a) Calculons u_1 et u_2.

   $$u_1 = \sum_{k=1}^{1} ln\left(1+\frac{k}{1^2}\right) = ln\left(1+\frac{1}{1^2}\right) = ln2 \text{ et } u_2 = \sum_{k=1}^{2} ln\left(1+\frac{k}{2^2}\right) = ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right) + ln\left(1+\frac{2}{2^2}\right) = ln\left(\frac{5}{4}\right) + ln\left(\frac{6}{4}\right).$$

   b) Montrer par récurrence que pour tout $n \ge 1$ on a : $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

   Pour $n=1$, $\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1$ et $\frac{1\times(1+1)\times(2\times 1+1)}{6} = 1$ donc l'égalité est vraie pour $n=1$.

   Supposons pour $n \ge 1$, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et démontrons que $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$.

   On a $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 =$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=(n+1)\left(\frac{n(2n+1)}{6}+(n+1)\right)=\frac{1}{6}(n+1)\big(n(2n+1)+6(n+1)\big)$$

$$=\frac{1}{6}(n+1)\left(2n^2+n+6n+6\right)=\frac{1}{6}(n+1)\left(2n^2+7n+6\right)=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$ ce qu'il faut prouver.

Donc pour tout $n\geq 1$ on a : $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

c) Montrons que (u_n) est convergente :

D'après 1. on a : $1\leq k\leq n\Rightarrow \frac{k}{n^2}\in[0,+\infty[$ et donc $\frac{k}{n^2}-\frac{k^2}{2n^4}\leq ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\leq\frac{k}{n^2}$.

Donc $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}-\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2n^4}\leq\sum_{k=1}^{n}ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\Leftrightarrow\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k-\frac{1}{2n^4}\sum_{k=1}^{n}k^2\leq u_n\leq\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{n^2}\times\frac{n(n+1)}{2}-\frac{1}{2n^4}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\leq u_n\leq\frac{1}{n^2}\times\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{(n+1)}{2n}-\frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3}\leq u_n\leq\frac{(n+1)}{2n}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2}=\frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{12n^3}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{12n}=0$

donc par le théorème de comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\frac{1}{2}$. La suite (u_n) est donc convergente vers $\frac{1}{2}$.

3. $\forall n\in\mathbb{N}^*$ par : $v_n=\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\left(1+\frac{3}{n^2}\right)...\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$.

Soit $t_n=ln(v_n)$

$t_n=ln(v_n)=\sum_{k=1}^{n}ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)=u_n$ donc $u_n=ln(v_n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\frac{1}{2}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$.

La suite (v_n) est donc convergente vers $\sqrt{e}$.