Lycée pilote de Tunis	Fonctions logarithmes 2	Terminales Maths
Mr Ben Regaya. A	+ Eléments de corrections	www.ben-regaya.net

Exercice1 « *L'infini, c'est long, surtout vers la fin.* » Alphonse Allais

f est la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x\ln x}{x+1}$.

1. Montrer que l'on a, pour tout réel x de $]0,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{x+1+\ln x}{(x+1)^2}$.
2. La fonction φ est définie sur $]0,+\infty[$ par $\varphi(x)=x+1+\ln x$. Etudier ses variations, en déduire que l'équation $\varphi(x)=0$ admet sur $]0,+\infty[$ une solution unique β. Etudier le signe de φ.
3. En déduire les variations de f, étudier les limites de f en 0 et $+\infty$.
4. Montrer que, pour tout entier strictement positif n, l'équation $f(x)=n$ admet une solution unique que l'on notera α_n. On cherche maintenant à étudier la suite (α_n).
5. Montrer que, pour tout entier $n\succ 0$, $f\left(e^n\right)\prec n$. En déduire que $\alpha_n\succ e^n$ et la limite de (α_n).
6. Prouver que la relation $f(\alpha_n)=n$ peut se mettre sous la forme $\ln\left(\dfrac{\alpha_n}{e^n}\right)=\dfrac{n}{\alpha_n}$. En déduire la limite de $\dfrac{\alpha_n}{e^n}$.

Exercice2

On pose, pour $n\geq 1$, $u_n=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+x^n}\,dx$.

1. Calculer u_1.
2. a) Montrer que, pour tout $x\geq 0$, $1-x^n\leq\dfrac{1}{1+x^n}\leq 1$.

   b) En déduire que : $1-\dfrac{1}{n+1}\leq u_n\leq 1$. Déterminer alors la limite de la suite (u_n).
3. On pose pour $n\geq 1$: $v_n=\displaystyle\int_0^1\frac{nx^n}{1+x^n}\,dx$.

   a) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que : $v_n=\ln 2-\displaystyle\int_0^1\ln(1+x^n)dx$

   b) Vérifier que, pour tout $t\geq 0 : 0\leq\ln(1+t)\leq t$. Montrer alors, que pour tout $x\geq 0$,

   $0\leq\displaystyle\int_0^1\ln\left(1+x^n\right)dx\leq\frac{1}{n+1}$.

   c) En déduire que la suite (v_n) est convergente et calculer sa limite.
4. Vérifier que, pour tout entier $n\geq 1$, $v_n+nu_n=n.$ En déduire que la suite $\left(n(1-u_n)\right)$ tend vers $\ln 2$.

Exercice3

1. Calculer $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\tan^2 x\,dx$ à l'aide d'une intégration par parties.

2. Soit la fonction définie sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x)=\sqrt{x}\,tanx$ de courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans le plan P muni du repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.On considère le solide engendré par la rotation autour de l'axe $(O\,;\vec{i})$ de la surface délimitée dans le plan P par l'axe $(O\,;\vec{i})$, la droite d'équation $x=\frac{\pi}{4}$ et la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

Sachant que l'unité graphique est de 2 *cm*, calculer le volume V du solide en cm^3.

Exercice4

Soit f la fonction numérique définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\frac{ln\,x}{x^2}$.

1. Étudier les variations de la fonction f. Montrer que, pour tout entier naturel k, avec $k\succ 2$,

$$f(k+1)\le\int_k^{k+1}f(t)dt\le f(k).$$

2. On considère la suite S définie par son terme général $S_p=\sum_{k=2}^{p}\frac{ln\,k}{k^2}=\frac{ln\,2}{2^2}+\frac{ln\,3}{3^2}+...+\frac{ln\,p}{p^2}$ où p est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

a)Montrer que la suite S est croissante.

b) En utilisant la question 1. montrer que $S_p-\frac{ln\,2}{2^2}\le\int_2^p f(t)dt\le S_p-\frac{ln\,p}{p^2}$.

En déduire un encadrement de S_p.

c) Calculer, en utilisant une intégration par parties, $\int_2^p f(t)dt$; en déduire que la suite S est majorée et quelle converge.

Exercice 5

Pour $x\succ 0$, on pose $f(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{ln\,t}{\left(1+t^2\right)^2}dt$.

1. Montrer que f et dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $f'(x)=\frac{\left(1-x^2\right)lnx}{\left(1+x^2\right)^2}$.

2. Soit h la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par $h(x)=tan\,x$.

a) Montrer que h réalise une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ sur $[0,+\infty[$.

b) Montrer que h^{-1} est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $\left(h^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{1+x^2}$.

c) Montrer que pour $x\succ 0$, $f(x)=\frac{1}{2}\left[h^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)-h^{-1}(x)\right]+\frac{x\,lnx}{1+x^2}$.

3. a) Déduire de ce qui précède $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Dresser le tableau de variation de f .

c) Donner l'allure de la courbe représentative de la fonction g prolongement par continuité de f en 0.

Lycée pilote de Tunis	**Fonctions logarithmes 2**	*Terminales Maths*
Mr Ben Regaya. A	**Eléments de corrections**	www.ben-regaya.net

Exercice1

1. f est dérivable sur $]0,+\infty[$ puisque la fonction ln est dérivable sur cet intervalle et que la fonction polynôme $x \mapsto x+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$ et on a :
$f'(x) = \frac{(lnx+1)(x+1)-(x\,lnx)}{(x+1)^2} = \frac{x+1+lnx}{(x+1)^2}$.

2. φ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\varphi'(x) = 1+\frac{1}{x} \succ 0$.
φ est continue et elle est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ donc elle réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\varphi\langle]0,+\infty[\rangle = \left] \lim\limits_{x\to 0^+} \varphi(x), \lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) \right[=]-\infty,+\infty[$.
$0 \in \varphi\langle]0,+\infty[\rangle$ donc l'équation $\varphi(x)=0$ admet une solution unique β dans $]0,+\infty[$.
φ étant strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et $\varphi(\beta)=0$ alors $\varphi(x) \prec 0$ sur $]0,\beta[$ et $\varphi(x) \succ 0$ sur $]\beta,+\infty[$ et $\varphi(\beta)=0$.

3. Le signe de $f'(x)$ sur $]0,+\infty[$ est celui de $\varphi(x)$ puisque $(x+1)^2 \succ 0$.
Ainsi f est strictement croissante sur $[\beta,+\infty[$ et strictement décroissante sur $]0,\beta]$ et $f'(\beta)=0$. faire le tableau de variation de φ.
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} \times lnx = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} lnx = +\infty$.
$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$ car $\lim\limits_{x\to 0^+} x\,lnx = 0$.

4. f est continue et strictement décroissante sur $]0,\beta]$ donc elle réalise une bijection de cet intervalle sur son image à savoir $f\langle]0,\beta] \rangle = [f(\beta),0[$ et donc on voit tout de suite que $f(\beta) \prec 0$ et que par conséquent f ne prend pas des valeurs positives sur $]0,\beta]$ ce qui veut dire que l'équation $f(x)=n$ n'admet pas de solution dans $]0,\beta]$.
f est continue et strictement croissante sur $[\beta,+\infty[$ donc elle réalise une bijection de cet intervalle sur son image à savoir $f\langle [\beta,+\infty[\rangle = [f(\beta),+\infty[$.
$n \geq 1 \Rightarrow n \in f\langle [\beta,+\infty[\rangle$ donc l'équation $f(x)=n$ admet dans $[\beta,+\infty[$ une solution unique que l'on notera α_n.

5. $f(e^n) = \frac{e^n\,ln(e^n)}{e^n+1} = \frac{ne^n}{e^n+1} = n \times \frac{e^n}{e^n+1} \prec n$ car $\frac{e^n}{e^n+1} \prec 1$.

$f\left(e^n\right) \prec n \Leftrightarrow f\left(e^n\right) \prec f\left(\alpha_n\right) \Leftrightarrow e^n \prec \alpha_n$ car f est strictement croissante sur $\left[\beta,+\infty\right[$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} e^n = +\infty$ car $e \succ 1$ donc par comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = +\infty$.

$$f\left(\alpha_n\right) = n \Leftrightarrow \frac{\alpha_n \times ln\left(\alpha_n\right)}{1+\alpha_n} = n \Leftrightarrow \alpha_n \times ln\left(\alpha_n\right) = n + n\alpha_n \Leftrightarrow ln\left(\alpha_n\right) = \frac{n}{\alpha_n} + n \Leftrightarrow ln\left(\alpha_n\right) - n = \frac{n}{\alpha_n}$$

$$\Leftrightarrow ln\left(\alpha_n\right) - ln\left(e^n\right) = \frac{n}{\alpha_n} \Leftrightarrow ln\left(\frac{\alpha_n}{e^n}\right) = \frac{n}{\alpha_n}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{lnx}{x}}{1+\frac{1}{x}} = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{f(\alpha_n)}{\alpha_n} = 0$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = +\infty$.

On en déduit donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} ln\left(\frac{\alpha_n}{e^n}\right) = 0$ par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\alpha_n}{e^n} = 1$.

Exercice2

1. $u_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \left[ln\left(1+x\right)\right]_0^1 = ln2$.

2. a) Montrons que, pour tout $x \geq 0$, $1 - x^n \leq \frac{1}{1+x^n} \leq 1$.

   facile a voir que $\frac{1}{1+x^n} \leq 1$ car $x^n \geq 0$.

   $1 - x^n - \frac{1}{1+x^n} = \frac{1 - x^{2n} - 1}{1+x^n} = \frac{-x^{2n}}{1+x^n} \leq 0$ et donc $1 - x^n \leq \frac{1}{1+x^n}$ ce qui donne finalement pour tout $x \geq 0$,
   $1 - x^n \leq \frac{1}{1+x^n} \leq 1$.

   b) On a pour tout $x \geq 0$: $1 - x^n \leq \frac{1}{1+x^n} \leq 1$ et le trois fonctions sont continues sur $\left[0,1\right]$ donc d'après la positivité de l'intégrale : $\int_0^1 \left(1 - x^n\right)dx \leq \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,dx \leq \int_0^1 1dx \Leftrightarrow \left[x - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \leq u_n \leq 1$

   $\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{n+1} \leq u_n \leq 1$ et on a $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1$ donc par comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

3. Pour $n \geq 1$, $v_n = \int_0^1 \frac{nx^n}{1+x^n}\,dx = \int_0^1 x \times \frac{nx^{n-1}}{1+x^n}\,dx$.

   On pose $\begin{cases} u'(x) = \frac{nx^{n-1}}{1+x^n} \\ v(x) = x \end{cases}$ donc $\begin{cases} u(x) = ln\left(1+x^n\right) \\ v'(x) = 1 \end{cases}$

   Les quatre fonctions sont continues sur $\left[0,1\right]$ donc d'après le théorème d'intégration par parties :

   $v_n = \left[xln\left(1+x^n\right)\right]_0^1 - \int_0^1 ln\left(1+x^n\right)dx = ln2 - \int_0^1 ln\left(1+x^n\right)dx$. c'est le résultat demandé.

   b) Vérifions que, pour tout $t \geq 0$: $0 \leq ln\left(1+t\right) \leq t$.

   Réponse 1 : Etude de variations

   On a $t \geq 0 \Leftrightarrow 1+t \geq 1 \Leftrightarrow ln\left(1+t\right) \geq 0$ par croissance de la fonction ln sur $\left]0,+\infty\right[$.

   On pose $\varphi(t) = ln\left(1+t\right) - t$. φ est dérivable sur $\left]-1,+\infty\right[$ et $\varphi'\left(t\right) = \frac{1}{1+t} - 1 = -\frac{t}{1+t}$.

Sur $[0,+\infty[$, $\varphi'(t)\leq 0$ donc φ est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$ donc

$t\geq 0 \Leftrightarrow \varphi(t)\leq\varphi(0)\Leftrightarrow ln(1+t)-t\leq 0\Leftrightarrow ln(1+t)\leq t$.

Conclusion pour tout réel $t\geq 0$: $0\leq ln(1+t)\leq t$.

Réponse 2 : Utilisation d'une intégration

Remarquons pour cela que pour tout réel $x\geq 0$, $0\leq\frac{1}{1+x}\leq 1$ et donc la positivité de l'intégrale et la continuité de la fonction $x\mapsto\frac{1}{1+x}$ sur $[0,+\infty[$ permettent d'écrire : pour tout réel $t\geq 0$,

$$0\leq\int_0^t\frac{1}{1+x}dx\leq\int_0^t 1dx\Leftrightarrow 0\leq\left[ln(1+x)\right]_0^1\leq t\Leftrightarrow 0\leq ln(1+t)\leq t.$$

$x\geq 0\Leftrightarrow x^n\geq 0$ et donc $0\leq ln(1+x^n)\leq x^n$ et donc la positivité de l'intégrale et la continuité de la fonction $x\mapsto ln(1+x^n)$ et $x\mapsto x^n$ sur $[0,+\infty[$ permettent d'écrire : $0\leq\int_0^1 ln(1+x^n)dx\leq\int_0^1 x^n dx$

$$\Leftrightarrow 0\leq\int_0^1 ln(1+x^n)dx\leq\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{n+1}.$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0$ donc par comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 ln(1+x^n)dx=0$ et comme $v_n=ln2-\int_0^1 ln(1+x^n)dx$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=ln2$.

4. $v_n+nu_n=\int_0^1\frac{nx^n}{1+x^n}dx+n\int_0^1\frac{1}{1+x^n}dx=\int_0^1\frac{nx^n+n}{1+x^n}dx$ d'après la linéarité de l'intégrale.

   Après simplification $v_n+nu_n=\int_0^1 n\,dx=n$.

   On a $v_n+nu_n=n\Leftrightarrow n(1-u_n)=v_n$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}n(1-u_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=ln2$.

Exercice3

1. Calculons I par une intégration par partie.

   On pose $\begin{cases}u'(x)=tan^2x=1+tan^2x-1\\ v(x)=x\end{cases}$ $\qquad\begin{cases}u(x)=tanx-x\\ v'(x)=1\end{cases}$

   Les quatre fonctions sont continues sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, le théorème d'intégration par partie permet donc d'écrire :

$$I=\left[x(tanx-x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}(tanx-x)dx=\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)-\left[-ln(cosx)-\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)-\left(-ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}{2}\right)=\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)+\left(ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\frac{(\pi)^2}{32}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi^2}{16}+\left(-\frac{1}{2}ln(2)+\frac{(\pi)^2}{32}\right)$$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi^2}{32}-\frac{1}{2}ln(2).$$

2. Par définition $V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}f^2(x)dx\times 8cm^3=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\,tan^2x\,dx\times 8cm^3$ et donc

$$V=\pi\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi^2}{32}-\frac{1}{2}ln(2)\right)\times 8cm^3=\pi\left(2\pi-\frac{\pi^2}{4}-4ln(2)\right)cm^3.$$

Exercice4

1. f est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur cet intervalle et

$f'(x)=\dfrac{x-2x\ln x}{x^4}=\dfrac{1-2\ln x}{x^3}$.

Le signe de $f'(x)$ sur $]0,+\infty[$ est celui de $1-2\ln x$ car $x^3\succ 0$ sur $]0,+\infty[$.

Or $1-2\ln x\geq 0\Leftrightarrow \ln x\leq \dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x\leq\sqrt{e}$.

Ainsi f est strictement croissante sur $]0,\sqrt{e}]$ et elle est strictement décroissante sur $[\sqrt{e},+\infty[$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$. Dresser le tableau de variation de f.

On a $\sqrt{e}\prec 2\prec k\leq t\leq k+1$ et f est strictement décroissante sur $[\sqrt{e},+\infty[$ donc $f(k+1)\leq f(t)\leq f(k)$ et donc vu que f est continue sur $]0,+\infty[$ donc sur $[k,k+1]$, la positivité de l'intégrale permet d'écrire $\int_k^{k+1} f(k+1)dt\leq\int_k^{k+1} f(t)dt\leq\int_k^{k+1} f(k)dt$. Or $\int_k^{k+1} f(k+1)dt=(k+1-k)f(k+1)=f(k+1)$ et $\int_k^{k+1} f(k)dt=(k+1-k)f(k)=f(k)$, on obtient donc $f(k+1)\leq\int_k^{k+1} f(t)dt\leq f(k)$.

2. a) $S_{p+1}-S_p=\sum\limits_{k=2}^{p+1}\dfrac{\ln k}{k^2}-\sum\limits_{k=2}^{p}\dfrac{\ln k}{k^2}=\dfrac{\ln(p+1)}{(p+1)^2}\succ 0$ car $p\geq 2\Leftrightarrow \ln(p+1)\geq \ln(3)$. la suite S est croissante.

b) pour tout entier naturel k, avec $k\succ 2$, $f(k+1)\leq\int_k^{k+1} f(t)dt\leq f(k)$ donc par sommation sur k compris entre 2 et $p-1$, on obtient : $\sum\limits_{k=2}^{p-1} f(k+1)\leq\sum\limits_{k=2}^{p-1}\int_k^{k+1} f(t)dt\leq\sum\limits_{k=2}^{p-1} f(k)$.

$\sum\limits_{k=2}^{p-1}\int_k^{k+1} f(t)dt=\int_2^3 f(t)dt+\int_3^4 f(t)dt+\ldots+\int_{p-1}^{p} f(t)dt=\int_2^p f(t)dt$. D'après la relation de Chasles pour le calcul intégrale.

$\sum\limits_{k=2}^{p-1} f(k+1)=\dfrac{\ln(3)}{3^2}+\dfrac{\ln(4)}{4^2}+\ldots+\dfrac{\ln(p)}{p^2}=S_p-\dfrac{\ln 2}{2^2}$

et $\sum\limits_{k=2}^{p-1} f(k)=\dfrac{\ln(2)}{2^2}+\dfrac{\ln(3)}{3^2}+\ldots+\dfrac{\ln(p-1)}{(p-1)^2}=S_p-\dfrac{\ln p}{p^2}$.

On obtient donc $S_p-\dfrac{\ln 2}{2^2}\leq\int_2^p f(t)dt\leq S_p-\dfrac{\ln p}{p^2}$ pour tout entier $p\geq 2$.

On a $S_p-\dfrac{\ln 2}{2^2}\leq\int_2^p f(t)dt\leq S_p-\dfrac{\ln p}{p^2}\Leftrightarrow -\dfrac{\ln 2}{2^2}\leq\int_2^p f(t)dt-S_p\leq-\dfrac{\ln p}{p^2}$

$\Leftrightarrow\dfrac{\ln p}{p^2}\leq-\int_2^p f(t)dt+S_p\leq\dfrac{\ln 2}{2^2}\Leftrightarrow\dfrac{\ln p}{p^2}+\int_2^p f(t)dt\leq S_p\leq\dfrac{\ln 2}{2^2}+\int_2^p f(t)dt$ c'est l'encadrement souhaité.

c) Calculons, en utilisant une intégration par parties, $\int_2^p f(t)dt$.

On pose $\begin{cases}u(t)=\ln t\\ v'(t)=\dfrac{1}{t^2}\end{cases}$ $\quad\begin{cases}u'(t)=\dfrac{1}{t}\\ v(t)=-\dfrac{1}{t}\end{cases}$

Les quatre fonctions sont continues sur $]0,+\infty[$ le théorème d'intégration par partie permet d'écrire :

$$\int_2^p f(t)dt=\left[-\frac{lnt}{t}\right]_2^p+\int_2^p \frac{1}{t^2}\,dt=-\frac{lnp}{p}+\frac{ln2}{2}+\left[-\frac{1}{t}\right]_2^p=-\frac{lnp}{p}+\frac{ln2}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{p}=\frac{ln2}{2}+\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{p}+\frac{lnp}{p}\right)$$

et on voit tout de suite que $\frac{ln2}{2}+\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{p}+\frac{lnp}{p}\right)\leq\frac{ln2}{2}+\frac{1}{2}$ car $\frac{1}{p}+\frac{lnp}{p}\geq 0$ puisque $p\geq 2$.

donc la suite S est majorée par $\frac{ln2}{2}+\frac{1}{2}$ et comme elle est croissante alors elle converge.

Exercice 5

1. Soit pour $x\in\left]0,+\infty\right[$; $f(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{ln\,t}{\left(1+t^2\right)^2}dt$.

La fonction $t\mapsto\frac{ln\,t}{(1+t^2)^2}$ est continue sur $\left]0,+\infty\right[$ comme quotient de deux fonctions continues avec $\left(1+t^2\right)^2\neq 0$ donc elle admet des primitives sur cet intervalle. Si G est l'une d'elles alors $f(x)=G(x)-G\left(\frac{1}{x}\right)$.

La fonction $x\mapsto\frac{1}{x}$ est dérivable sur $\left]0,+\infty\right[$ et elle est strictement positive sur cet intervalle donc la fonction $x\mapsto G\left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $\left]0,+\infty\right[$ et il en est de même de *f*.

$$f'(x)=\frac{ln\,x}{\left(1+x^2\right)^2}+\frac{1}{x^2}\frac{ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^2}=\frac{ln\,x}{\left(1+x^2\right)^2}-\frac{1}{x^2}\frac{ln(x)}{\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^2}=\frac{ln\,x}{\left(1+x^2\right)^2}-\frac{x^4}{x^2}\frac{ln(x)}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{\left(1-x^2\right)ln(x)}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

2. a) h est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et $h'(x)=1+tan^2x\succ 0$, h étant strictement croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et elle dérivable donc elle réalise une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ sur $h\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\right)=\left[0,+\infty\right[$.

b) h est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et h' ne s'annule pas sur cet intervalle alors h^{-1} est dérivable sur $\left]0,+\infty\right[$ et que $\left(h^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{1+tan^2(y)}=\frac{1}{1+x^2}$.

c) Montrons que pour $x\succ 0$, : $f(x)=\frac{1}{2}\left[h^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)-h^{-1}(x)\right]+\frac{x\,lnx}{1+x^2}$.

Soit $\varphi(x)=\frac{1}{2}\left[h^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)-h^{-1}(x)\right]+\frac{x\,lnx}{1+x^2}$.

φ est dérivable sur $\left]0,+\infty\right[$ et $\varphi'(x)=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{x^2}\times\left(h^{-1}\right)'\left(\frac{1}{x}\right)-\left(h^{-1}\right)'(x)\right]+\frac{(1+lnx)\left(1+x^2\right)-2x^2lnx}{\left(1+x^2\right)^2}$

$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{x^2}\times\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{1+x^2}\right]+\frac{1+lnx+x^2-x^2lnx}{\left(1+x^2\right)^2}=\left[-\frac{1}{1+x^2}\right]+\frac{1+lnx+x^2-x^2lnx}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{lnx-x^2lnx}{\left(1+x^2\right)^2}.$$

On voit donc que $\varphi'(x)=f'(x)$ pour tout réel x de $]0,+\infty[$ donc $\varphi(x)=f(x)+k, k\in\mathbb{R}$.

$f(1)=\int_1^1\frac{lnt}{\left(1+t^2\right)^2}dt=0$ et $\varphi(1)=\frac{1}{2}\left[h^{-1}(1)-h^{-1}(1)\right]+\frac{ln(1)}{1+1^2}=0$ donc $k=0$ ce qui donne $\varphi(x)=f(x)$ et

par suite pour $x\succ 0$, $f(x)=\frac{1}{2}\left[h^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)-h^{-1}(x)\right]+\frac{xlnx}{1+x^2}$.

3. a) $f(x)=\frac{1}{2}\left[h^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)-h^{-1}(x)\right]+\frac{xlnx}{1+x^2}$

$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}h^{-1}(x)=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\lim\limits_{x\to0^+}h^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to0^+}h^{-1}(x)=0$ et

$\lim\limits_{x\to0^+}xlnx=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to0^+}\frac{xlnx}{1+x^2}=0$ donc $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\frac{\pi}{4}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to0}h^{-1}(x)=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}h^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)=0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}h^{-1}(x)=\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{xlnx}{1+x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{lnx}{x}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\right)=0$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\frac{\pi}{2}$.

b) on a $f'(x)=\frac{\left(1-x^2\right)lnx}{\left(1+x^2\right)^2}$ et $\left(1+x^2\right)^2\succ0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $\left(1-x^2\right)lnx$.

On voit que f est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ et que $f'(1)=0$.

c) La courbe de g admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse 1 et la droite

d'équation $y=-\frac{\pi}{2}$ comme asymptote au voisinage de $+\infty$. Tracer cette courbe.