Lycée pilote de Tunis	Fonctions logarithmes - 3	Terminales Maths
Mr Ben Regaya. A	+éléments de corrections	www.ben-regaya.net

Exercice1

On considère la suite $\left(u_n\right)$ définie pour tout naturel non nul n par $u_n=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{n+k}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n}$.

1. Montrer que la suite $\left(u_n\right)$ est majorée par 2 et elle est convergente.
2. Montrer que pour tout réel $x \succ 0$, $\frac{1}{x+1} \leq ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$.
3. Déduire de ce qui précède que, pour tout naturel non nul n , $u_n \leq ln3 \leq u_n+\frac{2}{3n}$.
4. Déterminer alors la limite de la suite $\left(u_n\right)$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\left[0,+\infty\right[$ par : $\begin{cases} f(x)=\frac{1}{x}-\frac{ln(1+2x)}{2x^2}\ ;\ x \succ 0 \\ f(0)=1 \end{cases}$

1. Soit $x \geq 0$, montrer que pour tout $t \in [0,x]$ on a : $\frac{1}{1+2x} \leq \frac{1}{1+2t} \leq 1$
2. Soit $x \succ 0$

   a) Montrer que $f(x)=\frac{2}{x^2}\int_0^x \frac{t}{1+2t}dt$

   b) Montrer que $\frac{1}{1+2x} \leq f(x) \leq 1$ et en déduire que f est continue à droite de 0
3. Montrer que pour tout $x \geq 0$; $\int_0^x \frac{2t}{1+2t}dt=\frac{x^2}{1+2x}+2\int_0^x\left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt$
4. Soit $x \succ 0$

   a) Montrer que $f'(x)=-\frac{4}{x^3}\int_0^x\left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt$

   b) En utilisant 1. Montrer que $-\frac{4}{3} \leq f'(x) \leq -\frac{4}{3(1+2x)^2}$.

   c) Déduire que ; $-\frac{4x}{3} \leq f(x)-1 \leq -\frac{4x}{3(1+2x)^2}$

   d) En déduire que f est dérivable à droite de 0 et préciser le nombre dérivé de f à droite de 0.
5. Construire la courbe C de f dans un repère orthonormé.

Exercice3

1. On considère la fonction φ définie sur $]0,+\infty[$ par : $\varphi(x)=ln\left(x+1\right)-lnx-\dfrac{1}{x+1}$.

   a) Etudier les variations de φ.

   b) Déduire le signe de $\varphi(x)$ suivant les valeurs de x.

2. On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x)=xln\left(x+1\right)-x\,lnx & si\ x\succ 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$.

   a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

   b) Dresser le tableau de variation de f.

   c) Soit t un réel de $]0,1[$. On pose $I(t)=\int_t^1 f(x)\,dx$.

   A l'aide d'une intégration par parties, calculer $I(t)$. Déterminer $\lim\limits_{t\to 0} I(t)$.

3. On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x)=(x+1)ln\left(x+1\right)-(x+1)lnx$.

   Dresser le tableau de variation de g.

4. On considère les suites u et v définies par : Pour tout naturel non nul n, $u_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ et $v_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$.

   a) vérifier que pour tout naturel non nul n, $ln\left(u_n\right)=f(n)$ et $ln\left(v_n\right)=g(n)$.

   b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

   c) Démontrer que pour tout naturel non nul n, $2\le u_n\prec e\prec v_n$ et que $\dfrac{2}{n}\le v_n-u_n\prec\dfrac{4}{n}$.

   Déterminer un entier p tel que u_p soit une valeur approché de e à 10^{-3} prés.

Exercice4

Dans cette exercice, x désigne un réel élément de $[0,1[$.

1. a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout t de $[0,x]$, simplifier la somme $\sum\limits_{p=1}^{n} t^{p-1}$

   b) En déduire que : $\sum\limits_{p=1}^{n}\dfrac{x^p}{p}=-ln\left(1-x\right)-\int_0^x\dfrac{t^n}{1-t}dt$

   c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^x\dfrac{t^n}{1-t}dt=0$

   d) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{p=1}^{n}\dfrac{x^p}{p}=-ln\left(1-x\right)$

2. a) Après avoir vérifié que, pour tout entier naturel n non nul, on a $\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$ montré que la suite s

définie par $s_n=\sum_{p=1}^{n}\frac{x^{p+1}}{p(p+1)}$ est convergente.

b) Utiliser la première question pour établir que : $\lim_{n\to+\infty}\sum_{p=1}^{n}\frac{x^{p+1}}{p(p+1)}=x+(1-x)ln(1-x)$.

Exercice 5

On désigne par n un nombre entier relatif différent de -1 et par x un nombre réel supérieur ou égal à 1.

1. Calculer l'intégrale $I_n(x)=\int_1^x t^n ln\,t dt$ (on pourra effectuer une intégration par parties).
2. En déduire le calcul de $J_n(x)=\int_1^x t^n(lnt)^2dt$.
3. Calculer $I_n(e)-J_n(e)$.
4. déterminer la limite de $\frac{I_n(e)-J_n(e)}{e^{n+1}}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 6

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-1$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ du plan.

1. Vérifier que f est définie sur $D=]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$ puis montrer que la droite $\Delta: x=-\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de $\mathscr{C}$.
2. a) Montrer que $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$.

   b) Montrer que pour tout réel x de D, $f''(x)=\frac{1}{2x^2(x+1)^2}$ et calculer la limite de f' en $+\infty$.

   c) Dresser le tableau de variation de f et tracer $\mathscr{C}$.
3. Calculer l'aire de la partie du plan délimité par $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=1$ et $x=2$.
4. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $u_n=f(n)$ et $S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k$

   a) montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*, u_n=\int_0^1\frac{1-2x}{2(n+x)}dx$.

   b) On pose pour $n\in\mathbb{N}^*$, $a_n=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1-2x}{2(n+x)}dx$ et $b_n=\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{2x-1}{2(n+x)}dx$.

   Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{4(2n+1)}\le a_n\le\frac{1}{8n}$ et $\frac{1}{8(n+1)}\le b_n\le\frac{1}{4(2n+1)}$.

c) En déduire que la suite (S_n) est majorée par $\frac{1}{8}$ et qu'elle converge vers un réel α.

d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)ln(n+1) - n - ln(n!)$.

5. On pose pour tout naturel $n \geq 2$, $v_n = e^{1-S_{n-1}}$. On admet que $\alpha = 1 - \frac{ln(2\pi)}{2}$.

a) Montrer que pour tout naturel $n \geq 2$, $v_n = \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}}$.

b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n!}{\sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n}$.

Exercice 7

1. a) Soit la fonction h définie sur $]0,+\infty[$ par $h(x) = x - lnx$. Montrer que pour tout $x \succ 0$, $h(x) \geq 1$.

b) Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x-lnx} & x \succ 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

Montrer que f est continue sur $[0,+\infty[$. f est elle dérivable à droite en 0 ?

2. Soit φ la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $\varphi(x) = \int_x^{2x} f(t)\,dt$.

a) Montrer que φ est dérivable sur $[0,+\infty[$.

b) Montrer que pour tout réel x de $]0,+\infty[$, $\varphi'(x) = \frac{ln2 - lnx}{h(2x)h(x)}$ et que $\varphi'(0) = 0$.

3. a) Montrer que pour tout réel x de $]0,+\infty[$, $ln2 = \int_x^{2x} \frac{1}{t}\,dt$.

b) Montrer que pour tout réel x de $[1,+\infty[$, $0 \leq \varphi(x) - ln2 \leq \frac{ln(2x)}{x - lnx}$. Déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)$.

4. a) Montrer que $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) \leq ln2$.

b) Montrer alors qu'il existe un réel α de $\left[\frac{1}{2},1\right]$ tel que $\varphi(\alpha) = ln2$.

5. Dresser le tableau de variation de φ.

Lycée pilote de Tunis	**Fonctions logarithmes - 3**	*Terminales Maths*
Mr Ben Regaya. A	***éléments de corrections***	www.ben-regaya.net

Exercice1

1. On a : $1\le k\le 2n \Leftrightarrow 1+n\le n+k\le 3n \Leftrightarrow \frac{1}{3n}\le \frac{1}{n+k}\le \frac{1}{n+1}$ et par sommation k allant de 1 à $2n$, on obtient $\frac{2n}{3n}\le \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{n+k}\le \frac{2n}{n+1}$ $\frac{2}{3}\le \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{n+k}\le 2\frac{n}{n+1}\le 2$. Donc la suite u est majorée par 2.

   $u_{n+1}=\sum_{k=1}^{2n+2}\frac{1}{n+1+k}=\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{3n}+\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+3}$ $u_n=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{n+k}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{3n}$

   $u_{n+1}-u_n=-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+3}=-\frac{3}{3n+3}+\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+3}$

   $=-\frac{2}{3n+3}+\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}\ge 0$ en effet $3n+1\prec 3n+3$ et $3n+2\prec 3n+3$ donc la suite u est croissante et comme elle est majorée par 2 donc elle converge.

2. On a pour $x\succ 0$ et $x\le t\le x+1$, $\frac{1}{x+1}\le\frac{1}{t}\le\frac{1}{x+1}$.

   La fonction inverse étant continue sur $]0,+\infty[$, la positivité de l'intégrale permet d'écrire

   $\int_x^{x+1}\frac{1}{x+1}dt\le\int_x^{x+1}\frac{1}{t}dt\le\int_x^{x+1}\frac{1}{x+1}dt$ ou encore : $x\succ 0,\ \frac{1}{x+1}\le ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\le\frac{1}{x}$.

3. La double inégalité précédente écrite pour différentes valeurs de x donne :

   $x=n;\ \frac{1}{n+1}\le ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\le\frac{1}{n}$

   $x=n+1;\ \frac{1}{n+2}\le ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\le\frac{1}{n+1}$

   .
   .
   .

   $x=3n-1;\ \frac{1}{3n}\le ln\left(\frac{3n}{3n-1}\right)\le\frac{1}{3n-1}$

   Par sommation, on aura :

   $u_n\le ln3\le u_n-\frac{1}{3n}+\frac{1}{n}=u_n+\frac{2}{3n}$

4. La double inégalité précédente, s'écrit aussi $0\le ln3-u_n\le\frac{2}{3n}$.

   Or $\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{3n}=0$. Le théorème de comparaison permet d'affirmer que $\lim_{n\to+\infty}u_n=ln3$.

Exercice2

1. On a : $0\le t\le x\Rightarrow 1\le 1+2t\le 1+2x\Rightarrow\frac{1}{1+2x}\le\frac{1}{1+2t}\le 1$.

2. a) $x \succ 0$; $\dfrac{2}{x^2}\displaystyle\int_0^x \frac{t}{1+2t}dt = \frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{2t+1-1}{1+2t}dt = \frac{1}{x^2}\int_0^x \left(1-\frac{1}{1+2t}\right)dt = \frac{1}{x^2}\left[t-\frac{1}{2}ln(1+2t)\right]_0^x$

$= \dfrac{1}{x^2}\left[t-\dfrac{1}{2}ln(1+2t)\right]_0^x = \dfrac{1}{x^2}\left[x-\dfrac{1}{2}ln(1+2x)\right] = \dfrac{1}{x} - \dfrac{ln(1+2x)}{2x^2} = f(x)$. Ainsi

$\forall x \succ 0;\ f(x) = \dfrac{2}{x^2}\displaystyle\int_0^x \frac{t}{1+2t}dt$

Conclusion : Pour $x \succ 0$, $f(x) = \dfrac{2}{x^2}\displaystyle\int_0^x \frac{t}{1+2t}dt$.

b) On a pour $x \succ 0$ et $t \in [0,x]$; $\dfrac{1}{1+2x} \le \dfrac{1}{1+2t} \le 1 \Rightarrow \dfrac{t}{1+2x} \le \dfrac{t}{1+2t} \le t$ et les trois fonctions sont

continues sur $[0,+\infty[$ donc d'après la positivité de l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \frac{t}{1+2x}dt \le \int_0^x \frac{t}{1+2t}dt \le \int_0^x t\,dt$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{1+2x}\left[\dfrac{t^2}{2}\right]_0^x \le \dfrac{x^2}{2}f(x) \le \left[\dfrac{t^2}{2}\right]_0^x \Leftrightarrow \dfrac{1}{1+2x} \le f(x) \le 1$ avec $x \succ 0$.

Déduction : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+2x} = 1$ donc $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 = f(0)$ donc f est continue à droite en 0.

3. On pose $\begin{cases} u(t) = \dfrac{1}{1+2t} \\ v'(t) = 2t \end{cases}$ donc $\begin{cases} v'(t) = \dfrac{-2}{(1+2t)^2} \\ u(t) = t^2 \end{cases}$

Les quatre fonctions sont continues sur $[0,+\infty[$ par le théorème d'intégration par parties :

$\displaystyle\int_0^x \frac{2t}{1+2t}dt = \left[\frac{t^2}{1+2t}\right]_0^x + 2\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt$.

Donc $\displaystyle\int_0^x \frac{2t}{1+2t}dt = \frac{x^2}{1+2x} + 2\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt$.

4. a) f est dérivable sur $]0,+\infty[$ produit de deux fonctions dérivables sur cet intervalle et

$\forall x \succ 0$; $f'(x) = \dfrac{-4}{x^3}\displaystyle\int_0^x \frac{t}{1+2t}dt + \frac{2}{x(1+2x)} = \frac{-2}{x^3}\left[\frac{x^2}{1+2x} + 2\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt\right] + \frac{2}{x(1+2x)}$

$\Rightarrow f'(x) = \dfrac{-2}{x(1+2x)} - \dfrac{4}{x^3}\displaystyle\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt + \frac{2}{x(1+2x)}$. Finalement $\forall x \succ 0$, $f'(x) = -\dfrac{4}{x^3}\displaystyle\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt$

b) on a : $\dfrac{t}{1+2x} \le \dfrac{t}{1+2t} \le t \Rightarrow \dfrac{t^2}{(1+2x)^2} \le \left(\dfrac{t}{1+2t}\right)^2 \le t^2$ et les trois fonctions sont continues sur $[0,+\infty[$

donc d'après la positivité de l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \frac{t^2}{(1+2x)^2}dt \le \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt \le \int_0^x t^2 dt$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{(1+2x)^2}\displaystyle\int_0^x t^2 dt \le \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt \le \int_0^x t^2 dt$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^3}{3(1+2x)^2} \le \dfrac{-x^3}{4} f'(x) \le \dfrac{x^3}{3} \Leftrightarrow -\dfrac{4}{3} \le f'(x) \le -\dfrac{4}{3(1+2x)^2}$. C'est le résultat demandé.

c) On a $\forall x \succ 0$ et $\forall t \in [0,x]$, $-\dfrac{4}{3} \le f'(t) \le -\dfrac{4}{3(1+2t)^2} \le -\dfrac{4}{3(1+2x)^2}$.

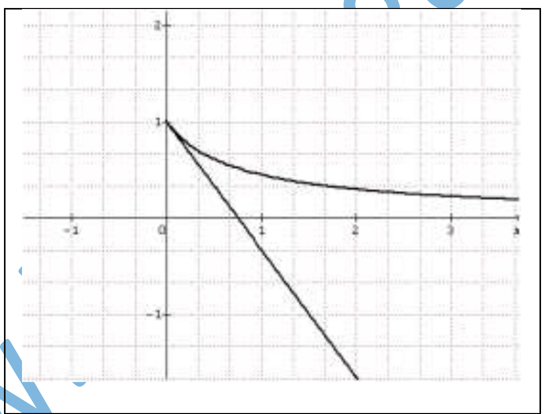
f est continue sur $[0,+\infty[$ donc sur $[0,x]$ et elle est dérivable sur $]0,+\infty[$ donc sur $]0,x]$ et pour tout réel $t \in [0,x]$, $-\dfrac{4}{3} \le f'(t) \le -\dfrac{4}{3(1+2x)^2}$ alors par le théorème des inégalités des accroissements finis

$\Leftrightarrow -\dfrac{4}{3}x \le f(x) - f(0) \le -\dfrac{4x}{3(1+2x)^2}$ le résultat en découle puisque $f(0) = 1$

d) On a $-\dfrac{4}{3} \le \dfrac{f(x)-f(0)}{x} \le \dfrac{-4}{3(1+2x)^2}$ et $\lim\limits_{x\to 0} -\dfrac{4}{3(1+2x)^2} = -\dfrac{4}{3}$

Donc par comparaison $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = -\dfrac{4}{3}$. Ainsi f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = -\dfrac{4}{3}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} - \dfrac{lnx + ln\left(\dfrac{1}{x}+2\right)}{2x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2}\dfrac{lnx}{x^2} - \dfrac{ln\left(\dfrac{1}{x}+2\right)}{2x^2} = 0$.



Exercice3

1. a) φ est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur cet intervalle et

$\varphi'(x) = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{(x+1)^2} = \dfrac{x(x+1)-(x+1)^2+x}{(x+1)^2}$ donc $\varphi'(x) = \dfrac{-1}{x(x+1)^2} \prec 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) - \dfrac{1}{x+1} = 0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) = ln(1) = 0$

et $\lim\limits_{x\to 0^+} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) - \dfrac{1}{x+1} = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x+1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} ln(x) = +\infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) = +\infty$.

b) φ est continue et elle est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ donc elle réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur

$\varphi\langle]0,+\infty[\rangle =]0,+\infty[$. Ainsi $\forall x \succ 0, \varphi(x) \succ 0$.

2. a) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$ car $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$ donc f est continue à droite en 0.

$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \ln(x+1) - \ln x = +\infty$ donc f n'est pas dérivable à droite en 0.

b) f est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme produit et somme de fonctions dérivables sur cet intervalle et

$f'(x) = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1} - \ln x - 1 = \ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x+1}$ ainsi $\forall x \succ 0$, $f'(x) = \varphi(x)$.

et comme $\forall x \succ 0, \varphi(x) \succ 0$ alors f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1$ car $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ donc par composée

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1$.

Ainsi f est une bijection strictement croissante de $[0,+\infty[$ sur $[0,1[$.

c) $I(t) = \int_t^1 f(x)\,dx = \int_t^1 x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)dx$

$\begin{cases} u(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \\ v'(x) = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2} \\ v(x) = \frac{1}{2}x^2 \end{cases}$. Les 4 fonctions sont continues sur $]0,+\infty[$, donc par

le théorème d'intégration par parties $I(t) = \int_t^1 f(x)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\right]_t^1 + \frac{1}{2}\int_t^1 \frac{x}{x+1}dx$ avec

$\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$. D'où $I(t) = \int_t^1 f(x)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\right]_t^1 + \frac{1}{2}\left[x - \ln(x+1)\right]_t^1$

$I(t) = \frac{1}{2}\ln(2) - \frac{t^2}{2}\ln\left(\frac{t+1}{t}\right) + \frac{1}{2}(1-\ln(2)) - \frac{1}{2}\left[t - \ln(1+t)\right]$ soit encore

$I(t) = \frac{1}{2} - \frac{t^2}{2}\ln\left(\frac{t+1}{t}\right) - \frac{1}{2}\left[t - \ln(1+t)\right]$

$\lim_{t\to 0^+} \frac{t^2}{2}\ln\left(\frac{t+1}{t}\right) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln\left(\frac{1+t}{t}\right)}{\frac{1+t}{t}} \times \frac{1+t}{t} \times \frac{t^2}{2} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln\left(\frac{1+t}{t}\right)}{\frac{1+t}{t}} \times \frac{t(1+t)}{2} = 0$ car $\lim_{t\to 0^+} \frac{1+t}{t} = +\infty$ et

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ donc par composée $\lim_{t\to 0^+} \frac{\ln\left(\frac{1+t}{t}\right)}{\frac{1+t}{t}} = 0$. On a donc $\lim_{t\to 0} I(t) = \frac{1}{2}$.

3. g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x \succ 0$, $g'(x) = ln(x+1) - lnx - \dfrac{1}{x}$

$= \displaystyle\int_x^{x+1} \frac{1}{t}\,dt - \int_x^{x+1} \frac{1}{x}\,dt = \int_x^{x+1}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{x}\right)dt \le 0$ car $\left(x \le t \le x+1 \Rightarrow \dfrac{1}{t} \le \dfrac{1}{x}\right)$

$\displaystyle\lim_{+\infty} g = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x} \times \frac{ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1.$

$\displaystyle\lim_{x\to0^+} g(x) = \lim_{x\to0^+} (x+1)ln(x+1) - (x+1)lnx = +\infty.$

on voit que g est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ et elle est à valeurs dans $]1,+\infty[$. On note donc que $\forall x \succ 0;\ g(x) \succ 1$.

4. a) $ln(u_n) = n \times ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = n \times ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) = n\,ln(n+1) - n\,lnn = f(n)$

$ln(v_n) = (n+1)ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = (n+1)ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) = (n+1)ln(n+1) - (n+1)lnn = g(n)$

b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f(n) = 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = e$ $\qquad \displaystyle\lim_{n\to+\infty} g(n) = 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} v_n = e$

f étant croissante sur $]0,+\infty[$, on en déduit que u l'est aussi de même v est décroissante.

De plus $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = e - e = 0$. Donc les suites u et v sont adjacentes et par suit pour tout naturel non nul n,

$2 \le u_n \prec e \prec v_n$. (u est minorée par $u_1 = 2$).

$v_n - u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\left(1+\dfrac{1}{n}-1\right) = \dfrac{1}{n}u_n$. Or $u_n \ge 2 \Rightarrow \dfrac{1}{n}u_n \ge \dfrac{2}{n}$

Aussi v est décroissante donc $v_n \le v_1 = 4 \Rightarrow v_n - u_n = \dfrac{1}{n}u_n \prec \dfrac{1}{n}v_n \prec \dfrac{4}{n}$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{2}{n} \le v_n - u_n \prec \dfrac{4}{n}$.

La calculatrice nous donne $u_{4821} = 2{,}717$ et $u_{4822} = 2{,}718$ donc u_{4821} est une valeur approchée de e à 10^{-3} prés.

Exercice4

1. a) Comme $x \in [0,1[$, alors, pour tout t de $[0,x]$, on a $t \ne 1$, d'où : $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} t^{p-1} = \frac{1-t^n}{1-t}$ (Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison t)

b) En intégrant entre 0 et x (les fonctions sont continues sur $[0,x]$), on obtient, par linéarité de l'intégrale :

$\displaystyle\int_0^x \sum_{p=1}^{n} t^{p-1}dt = \int_0^x \frac{1}{1-t}dt - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt$, puis, toujours par linéarité de l'intégrale :

$\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\int_0^x t^{p-1}dt = -ln|1-x| - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt$,ce qui s'écrit : $\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\frac{x^p}{p} = -ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt$

c) $\forall\ t \in [0, x], \dfrac{1}{1-x} \ge \dfrac{1}{1-t} \ge 1$. En multipliant les trois membres par $t^n \ge 0$ et en intégrant entre 0 et x

(bornes dans l'ordre croissant), on trouve : $\displaystyle\frac{1}{1-x}\int_0^x t^n dt \ge \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt \ge \int_0^x t^n dt$, ce qui s'écrit :

$$\frac{1}{1-x}\frac{x^{n+1}}{n+1} \geq \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt \geq \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}=0$ et, comme $x\in [0, 1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x^{n+1}=0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}x^{n+1}=0$

Le théorème d'encadrement permet alors de conclure que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt=0$

d) résultat immédiat

2. a) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$. On en déduit : $\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}=\frac{x^{n+1}}{n}-\frac{x^{n+1}}{n+1}=x\frac{x^n}{n}-\frac{x^{n+1}}{n+1}$.

$\sum\limits_{p=1}^{n} \frac{x^{p+1}}{p(p+1)}=x\sum\limits_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p}-\sum\limits_{p=1}^{n} \frac{x^{p+1}}{p+1}$ donc (s_n) est convergente (comme combinaison linéaire de suites convergentes).

b) On peut tout de suite écrire : $\sum\limits_{p=1}^{n} \frac{x^{p+1}}{p(p+1)}=x\sum\limits_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p}-\sum\limits_{p=1}^{n} \frac{x^{p+1}}{p+1}=x\sum\limits_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p}-\sum\limits_{k=2}^{n+1} \frac{x^k}{k}=$

$x\sum\limits_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p}-\left(\sum\limits_{p=1}^{n+1} \frac{x^p}{p}-x\right)$.Le résultat en découle par passage à la limite.

Exercice 5

1. $I_n(x)=\int_1^x t^n \ln t\,dt$

On pose $\begin{cases} u(t)=\ln t \\ v'(t)=t^n \end{cases}$ $\begin{cases} u'(t)=\frac{1}{t} \\ v(t)=\frac{1}{n+1}t^{n+1} \end{cases}$

Les fonctions étant continues sur $]0,+\infty[$ par le théorème d'intégration par parties :

$$I_n(x)=\left[\frac{1}{n+1}t^{n+1}\ln t\right]_1^x-\frac{1}{n+1}\int_1^x t^n dt=\frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln x-\frac{1}{n+1}\left[\frac{1}{n+1}t^{n+1}\right]_1^x$$

$$=\frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln x-\frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}.$$

2. $J_n(x)=\int_1^x t^n (\ln t)^2 dt$

Intégrons une deuxième fois par parties

On pose $\begin{cases} u(t)=(\ln t)^2 \\ v'(t)=t^n \end{cases}$ $\begin{cases} u'(t)=2\times\frac{1}{t}\times \ln(t) \\ v(t)=\frac{1}{n+1}t^{n+1} \end{cases}$

Les fonctions étant continues sur $]0,+\infty[$ par le théorème d'intégration par parties :

$$J_n(x)=\left[\frac{1}{n+1}t^{n+1}(\ln t)^2\right]_1^x-\frac{2}{n+1}\int_1^x t^n(\ln t)dt=\frac{1}{n+1}x^{n+1}(\ln x)^2-\frac{2}{n+1}I_n(x)$$

$$=\frac{1}{n+1}x^{n+1}(\ln x)^2-\frac{2}{n+1}\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln x-\frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}\right]$$

$$=\frac{1}{n+1}x^{n+1}(\ln x)^2-\frac{2}{(n+1)^2}x^{n+1}\ln x+\frac{2}{(n+1)^3}x^{n+1}-\frac{2}{(n+1)^3}.$$

3. $I_n(e)=\frac{1}{n+1}e^{n+1}\ln e-\frac{1}{(n+1)^2}e^{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{n+1}{(n+1)^2}e^{n+1}-\frac{1}{(n+1)^2}e^{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{n\,e^{n+1}+1}{(n+1)^2}$.

$$J_n(e)=\frac{1}{n+1}e^{n+1}-\frac{2}{(n+1)^2}e^{n+1}+\frac{2}{(n+1)^3}e^{n+1}-\frac{2}{(n+1)^3}$$

$$=\frac{(n+1)^2}{(n+1)^3}e^{n+1}-\frac{2(n+1)}{(n+1)^3}e^{n+1}+\frac{2}{(n+1)^3}e^{n+1}-\frac{2}{(n+1)^3}$$

$$=\frac{1}{(n+1)^3}\left[(n+1)^2e^{n+1}-2(n+1)e^{n+1}+2e^{n+1}-2\right]=\frac{1}{(n+1)^3}\left[(n^2+1)e^{n+1}-2\right]$$

$$I_n(e)-J_n(e)=\frac{n\,e^{n+1}+1}{(n+1)^2}-\frac{1}{(n+1)^3}\left[(n^2+1)e^{n+1}-2\right]$$

$$=\frac{n(n+1)e^{n+1}+(n+1)}{(n+1)^3}-\frac{n^2+1}{(n+1)^3}e^{n+1}+\frac{2}{(n+1)^3}=\frac{(n-1)e^{n+1}+(n+3)}{(n+1)^3}$$

$\frac{I_n(e)-J_n(e)}{e^{n+1}}=\frac{(n-1)e^{n+1}+(n+3)}{(n+1)^3e^{n+1}}=\frac{(n-1)}{(n+1)^3}+\frac{(n+3)}{(n+1)^3}\frac{1}{e^{n+1}}$ et comme

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(n-1)}{(n+1)^3}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)^3}=0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(n+3)}{(n+1)^3}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{3}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)^3}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{e^{n+1}}=0$ alors

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{I_n(e)-J_n(e)}{e^{n+1}}=0$.

Exercice 6

1. f est définie si et seulement si $1+\frac{1}{x}\succ 0\Leftrightarrow\frac{x+1}{x}\succ 0$ donc il suffit d'avoir $x(x+1)\succ 0$. Ainsi f est définie $\Leftrightarrow x\in\,]-\infty,-1[\,\cup\,]0,+\infty[$.

   Montrons que $\Delta: x=-\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}$.

   Si $x\prec -1\Leftrightarrow -x\succ 1\Leftrightarrow -1-x\succ 0$ et si $x\succ 0\Leftrightarrow -x\prec 0\Leftrightarrow -1-x\prec -1$ et
   $f(-1-x)=\left(-\frac{1}{2}-x\right)\ln\left(1+\frac{1}{-1-x}\right)-1=-\left(\frac{1}{2}+x\right)\ln\left(\frac{x}{1+x}\right)-1=\left(\frac{1}{2}+x\right)\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)-1=f(x)$. On vient de prouver que la droite $\Delta: x=-\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}$.

2. a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}+x\right)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2x}+1\right)\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=1$ en effet :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$ donc par composée $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\dfrac{1}{x}}=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2x}+1\right)=1$

Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

b) f est dérivable sur chacun des intervalles qui forment l'ensemble de définition car produit de fonctions dérivables et $f'(x)=\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)+\left(\dfrac{1}{2}+x\right)\times\dfrac{-\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x}}=\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{2x+1}{2x(x+1)}$

f' est aussi dérivable sur chacun des intervalles qui forment l'ensemble de définition et

$$f''(x)=\frac{-1}{x(x+1)}-\frac{1}{2}\times\frac{2x(x+1)-(2x+1)^2}{x^2(x+1)^2}=\frac{-1}{x(x+1)}-\frac{-2x^2-2x-1}{2x^2(x+1)^2}=\frac{-2x(x+1)}{x(x+1)}-\frac{-2x^2-2x-1}{2x^2(x+1)^2}$$

$$=\frac{-2x(x+1)}{x(x+1)}-\frac{-2x^2-2x-1}{2x^2(x+1)^2}=\frac{1}{2x^2(x+1)^2}\succ 0$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{2x+1}{2x(x+1)}=0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}1+\dfrac{1}{x}=1$ et $\ln(1)=0$ et

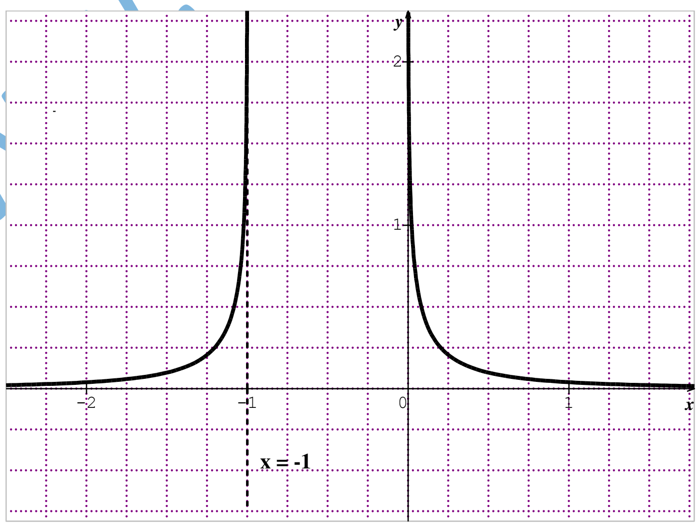
$\lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{2x+1}{2x(x+1)}=\lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{2x}{2x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{1}{x}=0$.

c) f'' étant strictement positive sur chacun des intervalles qui forment l'ensemble de définition donc la fonction dérivée f' est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et comme $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$ alors f' est strictement négative sur cet intervalle et f est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$.

La droite $\Delta: x=-\dfrac{1}{2}$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}$ alors f est strictement croissante sur $]-\infty,-1[$.

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{2}+x\right)\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-1=+\infty$ donc toujours par symétrie $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=+\infty$.

Courbe de f.



3. Pour tout réel $x\succ0,\ f(x)\succ0$ donc l'aire demandée en unité d'aire est donnée par $\int_1^2 f(x)dx$.

Calculons par parties $\int_1^2\left(\dfrac{1}{2}+x\right)\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)dx$

On pose $\begin{cases} u(x)=ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) \\ v'(x)=x+\dfrac{1}{2} \end{cases}$ donc $\begin{cases} u'(x)=-\dfrac{1}{x(x+1)} \\ v(x)=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}x \end{cases}$

La continuité des 4 fonctions et le théorème d'intégration par parties permettent d'écrire :

$$\int_1^2\left(\frac{1}{2}+x\right)ln\left(1+\frac{1}{x}\right)dx=\left[\frac{1}{2}\left(x^2+x\right)ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]_1^2+\frac{1}{2}\int_1^2\frac{x^2+x}{x(x+1)}\,dx$$

$$=3ln\left(\frac{3}{2}\right)-ln2-\frac{1}{2}\int_1^2 1\,dx=3ln\left(\frac{3}{2}\right)-ln2+\frac{1}{2}$$

Ainsi l'aire demandée en unité d'aire est $3ln\left(\dfrac{3}{2}\right)-ln2-\dfrac{1}{2}$.

4. a) $\displaystyle\int_0^1\frac{1-2x}{2(n+x)}dx=-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x-1}{(n+x)}dx=-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x+2n-2n-1}{(n+x)}dx=-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x+2n}{(n+x)}dx+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2n+1}{(n+x)}dx$

$$=-1+\frac{2n+1}{2}\left[ln(n+x)\right]_0^1=-1+\left(n+\frac{1}{2}\right)ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=f(n)$$

Ainsi pour tout n entier naturel non nul $u_n=\displaystyle\int_0^1\frac{1-2x}{2(n+x)}dx$.

b) on a : $0\le x\le\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow n\le n+x\le n+\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\dfrac{1}{n+\frac{1}{2}}\le\dfrac{1}{n+x}\le\dfrac{1}{n}$ et on multipliant par : $1-2x\ge 0$, on obtient :

$$\frac{1-2x}{n+\frac{1}{2}}\le\frac{1-2x}{n+x}\le\frac{1-2x}{n}$$

et comme $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}(1-2x)dx=\left[x-x^2\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}$ alors la double inégalité précédente devient :

$\dfrac{1}{4n+2}\le\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1-2x}{n+x}dx\le\frac{1}{4n}$ ou encore $\dfrac{1}{4(2n+1)}\le a_n\le\dfrac{1}{8n}$.

On a aussi $2b_n=\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{2x-1}{n+x}dx$

$\dfrac{1}{2}\le x\le 1\Leftrightarrow n+\dfrac{1}{2}\le n+x\le n+1\Leftrightarrow\dfrac{1}{n+1}\le\dfrac{1}{n+x}\le\dfrac{2}{2n+1}$ et on multipliant par : $2x-1\ge 0$, on obtient :

$$\frac{2x-1}{n+1}\le\frac{2x-1}{n+x}\le\frac{2(2x-1)}{2n+1}$$

L'égalité $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1(2x-1)dx=\left[x^2-x\right]_{\frac{1}{2}}^1=\frac{1}{4}$ nous donne l'encadrement suivant $\dfrac{1}{4(n+1)}\le 2b_n\le\dfrac{1}{2(2n+1)}$ soit encore : $\dfrac{1}{8(n+1)}\le b_n\le\dfrac{1}{4(2n+1)}$.

c) On a pour tout naturel k non nul $u_k=\displaystyle\int_0^1\frac{1-2x}{2(k+x)}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1-2x}{2(k+x)}dx+\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{1-2x}{2(k+x)}dx$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1-2x}{2(k+x)}dx-\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{2x-1}{2(k+x)}dx=a_k-b_k\le\frac{1}{8k}-\frac{1}{8(k+1)}.$$

Par sommation sur k, on obtient : $\displaystyle\sum_{k=1}^n u_k\le\sum_{k=1}^n\left(\frac{1}{8k}-\frac{1}{8(k+1)}\right)$

Mais $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{8k}-\frac{1}{8(k+1)}\right)=\frac{1}{8}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{8}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{8}\left(\frac{n}{n+1}\right)$

qui est inférieur à $\frac{1}{8}$. Ainsi la suite (S_n) est majorée par $\frac{1}{8}$.

$S_{n+1}-S_n=u_{n+1}=f(n+1)\succ 0$ donc la suite est aussi croissante elle converge vers un réel α.

d) $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(k+\frac{1}{2}\right)ln\left(1+\frac{1}{k}\right)-n$.

Montrons par récurrence que pour tout naturel non nul n, $S_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)ln(n+1)-n-ln(n!)$.

Pour $n=1$, $\left(1+\frac{1}{2}\right)ln(1+1)-1-ln(1!)=\frac{3}{2}ln2-1$ et $S_1=f(1)=\frac{3}{2}ln2-1$ d'où la vérification.

Soit n un naturel non nul. Supposons $S_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)ln(n+1)-n-ln(n!)$

$$S_{n+1}=S_n+u_{n+1}=\left(n+\frac{1}{2}\right)ln(n+1)-n-ln(n!)+\left(n+1+\frac{1}{2}\right)ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)-1$$

$$=\left(n+\frac{1}{2}\right)ln(n+1)-(n+1)-ln(n!)+\left(n+\frac{3}{2}\right)ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$$

$$=\left(n+\frac{3}{2}\right)ln(n+1)-ln(n+1)+\left(n+\frac{3}{2}\right)ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)-(n+1)-ln(n!)$$

$=\left(n+\frac{3}{2}\right)ln(n+2)-ln((n+1)!)-(n+1)$ c'est le résultat demandé.

Conclusion pour tout n naturel non nul : $S_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)ln(n+1)-n-ln(n!)$.

5. Pour $n\geq 2$, $v_n=e^{1-S_{n-1}}$ et on admet que $\alpha=1-\frac{ln(2\pi)}{2}$.

a) $v_n=e^{1-S_{n-1}}=e^{-\left(n-\frac{1}{2}\right)ln(n)+n+ln((n-1)!)}=\frac{e^{ln((n-1)!)}e^n}{e^{\left(n-\frac{1}{2}\right)ln(n)}}=\frac{(n-1)!}{e^{-n}e^{nln(n)}e^{-\frac{1}{2}ln(n)}}=\frac{(n-1)!e^{ln(\sqrt{n})}}{e^{-n}n^n}=\frac{(n-1)!\sqrt{n}}{e^{-n}n^n}$

$=\frac{(n!)}{e^{-n}n^n\sqrt{n}}$ c'est le résultat demandé.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\alpha=1-\frac{ln(2\pi)}{2}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=e^{1-\alpha}=e^{\frac{ln(2\pi)}{2}}=e^{ln(\sqrt{2\pi})}=\sqrt{2\pi}$. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(n!)}{e^{-n}n^n\sqrt{n}}=\sqrt{2\pi}$

ou encore $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(n!)}{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}}=1$.

Exercice 7

1. a) h dérivable sur $]0,+\infty[$ et $h'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$.

h' s'annule en 1 et change de signe en allant du (-) vers le (+) don h admet un minimum absolu en 1 égal $h(1)=1$. Ainsi pour tout $x\succ 0$, $h(x)\geq 1$.

b) h est dérivable sur $]0,+\infty[$ somme de fonctions dérivables et pour tout $x \succ 0,\ h(x) \geq 1$ donc la fonction $\dfrac{1}{h}$

est dérivable sur cet intervalle et par suite f est continue sur $]0,+\infty[$.

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x - lnx} = 0 = f(0)$ par suite f est continue à droite en 0 et par suite sur $[0,+\infty[$.

Pour $x \succ 0,\ \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{\frac{1}{x-lnx}}{x} = \dfrac{1}{x(x - lnx)} = \dfrac{1}{x^2 - xlnx}$

$\lim\limits_{x \to 0^+} x^2 - xlnx = 0$ et $x(x - lnx) = xh(x) \succ 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^2 - xlnx} = +\infty$ f n'est pas dérivable à droite en 0.

2. a) f est continue sur $[0,+\infty[$, donc f admet des primitives sur cet intervalle . Soit G l'une d'elles.

Donc pour tout $x \geq 0$ on a $2x \geq 0$ et $\varphi(x) = G(2x) - G(x)$.

La fonction $u : x \mapsto 2x$ est polynôme dérivable sur $[0,+\infty[$ et a valeurs dans $[0,+\infty[$ et G est dérivable sur $[0,+\infty[$ donc $\varphi = G \circ u - G$ est dérivable sur cet intervalle comme somme de fonctions dérivables.

b) On a pour tout $x \geq 0$, $\varphi'(x) = 2 \times G'(2x) - G'(x) = 2f(2x) - f(x) = 2\dfrac{1}{2x - ln(2x)} - \dfrac{1}{x - lnx}$

$= \dfrac{2}{h(2x)} - \dfrac{1}{h(x)} = \dfrac{2h(x) - h(2x)}{h(2x)h(x)} = \dfrac{ln2 - ln(x)}{h(2x)h(x)}$. C'est le résultat demandé.

3. a) Pour x réel de $]0,+\infty[$, $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{t}\, dt = [lnt]_x^{2x} = ln(2x) - lnx = ln2$.

b) Soit x un réel de $[1,+\infty[$, $\varphi(x) - ln2 = \displaystyle\int_x^{2x} f(t)\, dt - \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt = \int_x^{2x} \left(\frac{1}{t - lnt} - \frac{1}{t} \right) dt = \int_x^{2x} \frac{lnt}{t(t - lnt)} dt$.

Pour $1 \leq x \leq t \leq 2x$ on a : $0 \leq lnx \leq lnt \leq ln(2x)$ et $0 \prec \dfrac{1}{2x} \leq \dfrac{1}{t} \leq \dfrac{1}{x}$ donc par produit

$0 \leq \dfrac{lnx}{2x} \leq \dfrac{lnt}{t} \leq \dfrac{ln(2x)}{x}$ **(1).**

La fonction h est strictement croissante sur $[1,+\infty[$ on a $1 \leq x \leq t \leq 2x$ donc $1 \leq h(x) \leq h(t) \leq h(2x)$ donc

$0 \prec \dfrac{1}{h(2x)} \leq \dfrac{1}{h(t)} \leq \dfrac{1}{h(x)}$ **(2).**

D'après **(1)** et **(2)** on peut écrire pour $1 \le x \le t \le 2x$ on a $0 \le \frac{lnt}{t\,h(t)} \le \frac{ln(2x)}{x\,h(x)}$ on a fait le produit.

Donc par le théorème des inégalités de la moyenne $0 \le \int_x^{2x} \frac{lnt}{t\,h(t)}dt \le (2x-x)\frac{ln(2x)}{x\,h(x)}$ ou encore

$0 \le \int_x^{2x} \frac{lnt}{t\,h(t)}dt \le \frac{ln(2x)}{h(x)}$.

On vient de prouver que pour tout réel x de $[1,+\infty[$, $0 \le \varphi(x) - ln2 \le \frac{ln(2x)}{x - lnx}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{ln(2x)}{x - lnx} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{ln(2x)}{2x}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{lnx}{x}} = 0 \text{ en effet } \lim_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x} = 0.$$

Le théorème de comparaison permet de conclure que $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = ln2$.

4. a)On a pour tout $t \succ 0$, $h(t) \ge 1$. Donc pour tout $t \succ 0$, $\frac{1}{h(t)} \le 1$ et par suite $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{h(t)}dt \le 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ c'est-à-dire $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) \le \frac{1}{2} \le ln2$.

b) On sait d'après 3. b) $\varphi(1) - ln2 \ge 0 \Leftrightarrow \varphi(1) \ge ln2$. Ainsi $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) \le ln2 \le \varphi(1)$.

φ est dérivable sur $[0,+\infty[$ donc continue sur cet intervalle et $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) \le ln2 \le \varphi(1)$ donc d'prés le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un réel α de $\left[\frac{1}{2},1\right]$ tel que $\varphi(\alpha) = ln2$.

5. $\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

φ est strictement croissante sur $[0,2]$ et strictement décroissante ailleurs.