Comme je ne suis pas payé en fonction de ce que je fais, je fais en fonction de ce que je suis payé [Georges Wolinski]

Exercice 1 : 3 points :
Questions indépendantes

1) Calculer $\int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} \ln\left(\frac{1+\tan(x)}{1-\tan(x)}\right) dx$.

2) Calculer chacune des limites suivantes :

a) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(1+\ln(x))}{x-1}$ b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x-\sqrt[3]{x})}{\ln(x^2-x)}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{1+x}{2-\cos x}\right)$. d) $\lim\limits_{x\to 1^-} \left[\ln\left(\sqrt[3]{1-x^2}\right).\ln(x)\right]$

e) $\lim\limits_{x\to 0} (x^2)\ln\left(\frac{1}{1-\cos x}\right)$. f) $\lim\limits_{x\to 1^-} \left[\ln\left(\sqrt[3]{1-x}\right).\ln(x)\right]$.

Exercice 2 :

Pour tout entier naturel n non nul, on considère l'intégrale $I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$

1) Etudier la monotonie de (I_n)

2) a) Evaluer I_1
 b) Montrer que $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$

3) M que pour tout entier naturel non nul n, $I_n \leq \frac{e}{n+1}$.

4) Montrer que (I_n) est convergente puis calculer $\lim_{n\to+\infty} I_n$

Exercice 3:

Calculer les intégrales suivantes :

$M=\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx$; $A=\int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2x}{\cos x+\sin x}dx$; $H=\int_1^e x\ln x\, dx$

$D=\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}dx$; $I=\int_e^{e^2} \frac{1}{x}\ln x\, dx$;

Exercice 4 :7 points :

f est la fonction définie sur IR* par $f(x) = \ln|x| - \frac{\ln|x|}{x}$.

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O , $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$).

1) a) Montrer que f est dérivable sur IR* et que pour tout x de IR* ; $f'(x) = \frac{x-1+\ln|x|}{x^2}$.

b) Soit h la fonction définie sur IR* par :
$h(x) = \ln|x| + x - 1$.
Etudier les variations de h.
Calculer h(1) puis déduire le signe de h(x) sur IR*.

2) a) Etudier les variations de f.
 b) Tracer $\mathscr{C}$, la courbe représentative de f dans un plan muni d'un repère orthonormé direct (O , $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$).

3) a) Démontrer que pour tout n de IN*, l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet une solution unique x_n dans [1,+∞ [.
 b) Démontrer que la suite (x_n) est monotone puis déduire qu'elle est convergente.
 c) On note ℓ la limite de la suite (x_n) ;
Justifier que $f(\ell) = 0$ puis déduire ℓ.

4) Soit g la restriction de f sur]−∞ , 0[.
 a) Montrer que g réalise une bijection de] − ∞, 0[sur un intervalle J que l'on précisera.
 b) Construire la courbe $\mathscr{C}'$ de la fonction réciproque g^{-1} dans le même repère.
Placer le point A de $\mathscr{C}$ d'abscisse – 2.

5) Calculer l'aire du domaine du plan délimité par C'et les droites d'équations:
y = 0, x = 0 et $x = \ln(2\sqrt{2})$.

Exercice 5:

Soit f la fonction définie sur IR+ par
$$\begin{cases} f(x) = 1 - x + x\ln x \ ; \ x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1)a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0+
 b) Etudier f puis construire sa courbe C.

2)a) Mque $\forall x \geq 0$; $\frac{x}{x+1} \leq \ln(x+1) \leq x$

b)En déduire que $\forall k \leq n$, $\frac{k^2}{n^2+n^3} \leq \ln(1+\frac{k^2}{n^3}) \leq \frac{k^2}{n^3}$

c)Déduire la limite de la suite u définie par :

$u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{n^3+k^2}{n^3}\right)$

On rappelle que $\sum_0^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Exercice 6 (9 points)

Soit f la fonction f définie sur $[\frac{1}{e}$, e] par

$f(x) = (\ln x)^3 - 3\ln x$.

1) a) Calculer f (e) et f $(\frac{1}{e})$

 b) Montrer que f réalise une bijection de $[\frac{1}{e}$, e] sur [-2, 2]

 c) Dans l'annexe jointe, on a tracé la courbe (C) de la fonction f et les demi-tangentes aux points d'abscisses $\frac{1}{e}$ et e. Tracer, dans le même repère, la courbe (C') de f^{-1} et les demi-tangentes à (C') aux points d'abscisses –2 et 2.

2) Soit la suite (a_n) définie, pour tout n∈IN*, par

$a_n = \int_1^e (\ln x)^n \, dx$

a) Calculer a_1.

b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $a_{n+1} = e - (n+1)a_n$

c) En déduire que $a_3 = 6 - 2e$.

3° Soit A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C') et les droites y = 0, x = – 2 et x = 0

a) Calculer $\int_1^e f(x)\,dx$

b) En déduire A.

Exercice 7:

Soit f la fonction définie sur IR+,

Soit f(x) = $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x\ln x}{-1+x};\ x \neq 0 \text{ et } x \neq 1 \\ f(0) = 0; f(1) = 1 \end{cases}$

1)a)Montrer que f est continue sur IR+

b)Etudier la dérivabilité de f en 0+

2)Soit $\varphi(t) = \dfrac{x\ln x - x + 1}{(x-1)^2}(t-1)^2 - t\ln t - 1 + t$, $x \in IR^*_+ \setminus \{1\}$

On admet qu'il existe un réel c compris entre 1 et x tel que $\varphi'(c) = 0$

a) Déterminer $\lim\limits_{1} \dfrac{x\ln x - x + 1}{(x-1)^2}$

b) Prouver que f est dérivable en 1 puis donner l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1.

3)a)Etudier les variations de la fonction g définie par $g(x) = 1 - x^2 + 2x\ln x$ puis déduire le signe de g(x).

b)Etudier alors la position de la courbe (C) par rapport à la tangente (T).

4)Dresser le tableau de variation de f et tracer la courbe (C) de f.

Exercice 8 **(7 points)**

Soit par $f(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt$, $x > 0$

1° a)Etudier le sens de variations de f.

b)En déduire le signe de f(x)

2° a)Soit x un réel strictement positif, calculer $\displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{t^2}\,dt$.

b)En déduire que pour tout $x \geq 1$,

$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x}\ln x\right) \leq f(x) \leq 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x}\ln x$

c)Prouver alors que f admet en $+\infty$ une limite finie l et que $\frac{1}{2} \leq l \leq 1$

3° a)Montrer que, pour tout réel x > 0, $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$.

b)En déduire que f est prolongeable par continuité en 0.

Exercice 9: (6 points)

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = x - \ln(1 + x^2)$.

On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

I/ 1) a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

b) Montrer que la droite C admet une branche infinie de direction asymptotique la droite $D : y = x$.

2) Dresser le tableau de variation de f.

3) a) Donner une équation de la tangente Δ à la courbe C au point O.

b) Etudier la position relative de la droite Δ et la courbe C.

c) Tracer dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la droite Δ et la courbe C.

II/ 1) Soit h la fonction définie sur IR par : $h(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Montrer que h admet une primitive H définie sur IR vérifiant H(0) = 0.

2) Soit G la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ par

G(x)= H(tanx) où $H(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$

a) Montrer que G est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et déterminer sa fonction dérivée.

b) Expliciter G(x) en fonction de x pour tout x appartenant à $[0, \frac{\pi}{2}[$.

c) Calculer alors $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt$.

3) a) A l'aide d'une intégration par partie, montrer que : $\int_0^1 \ln(1 + x^2)\,dx = \ln 2 - 2 + 2\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$.

b) Déduire l'aire A en u.a de la partie du plan limitée par la courbe C, la droite Δ et les droites d'équations x = 0 et x = 1.

Exercice 10:

I/ Soit f la fonction définie sur IR+ par

$\begin{cases} f(x) = x(-1 + \ln(x)) \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1)Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

2)Etudier les variations de f et construire sa courbe représentative C dans un repère ortho normal

3)Soit φ la restriction de f à l'intervalle [0, 1]. Montrer que φ réalise une bijection de [0, 1] dans un intervalle J à préciser.

a- Déterminer le domaine de dérivabilité de φ^{-1}.

b- Construire les courbes C de φ et C' de φ^{-1} dans un repère orthonormé $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$

II/ Soit u la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = e \\ u_n > 0 \text{ et } u_{n-1}f'(u_n) = f(u_{n-1}),\ n \geq 1 \end{cases}$$

1)a)Mque u est une suite géométrique de raison $\frac{1}{e}$.
b- Exprimer alors u_n en fonction de n
Pour tout $k \in IN$, M_k et M_{k+1} sont les points de C d'abscisses respectives u_k et u_{k+1}.
Soit S_k l'aire du triangle OM_kM_{k+1}.

a- Prouver que $S_k = \frac{1}{2}\left[u_{k+1}f(u_k) - u_k f(u_{k+1})\right]$

b- Calculer S_k en fonction de k.

c- Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n-1} S_k$, Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

Exercice 11 :

I/ Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \ln\left[\, x + \sqrt{x^2-1}\,\right]$$

1) Déterminer le domaine D de f.
2)Etudier les variations de f et construire sa courbe représentative C dans un r.o.n$(o, \vec{i}, \vec{j})$
1) a-Montrer que f réalise une bijection de D dans un intervalle J à préciser.
b- Déterminer le domaine de dérivabilité de f^{-1}.
c- Construire la courbe C' de f^{-1} dans le même repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

Vérifier que $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $x \in IR+$.

II/ Soit u la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ 1 + u_{n+1} = 2u_n^2,\ n \geq 0 \end{cases}$

Montrer que pour tout n , $u_n > 1$.
2) On pose pour tout n de IN, $V_n = f(u_n)$
a- Vérifier que la suite (V_n) est bien définie et déterminer v_0.
b)Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique puis déduire l'expression de v_n en fonction de n et v_0.

c)M alors que $u_n = \frac{1}{2}\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^{2^n} + \left(2-\sqrt{3}\right)^{2^n}\right]$

Exercice 12:(4 points)

Soit f la fonction définie sur [0,1] par

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x-1}{lnx} \ si\ x \in]0,1[\\ f(0) = 0 \ et\ f(1) = 1 \end{cases}$$

1) Vérifier que f est continue sur [0,1].
2) Soit F la fonction définie sur [0,1] par:

$F(x) = \int_1^x f(t)dt$. Et G la fonction définie sur]0,1] par: $G(x) = h(x^2) - H(x)$ où H est une primitive de la fonction $t \mapsto \frac{f(t)}{t}$ sur]0, 1]

a) Montrer que G est dérivable sur]0,1] et que $G'(x) = f(x)$
b) En déduire que pour tout x de]0,1], $G(x) = F(x)$
c) Prouver alors que $\lim\limits_{x\to 0^+} G(x) = F(0)$

3) a) Montrer que pour tout x de]0,1[,

$$\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t}dt = \ln 2$$

b) En déduire pour tout x de]0,1[,

$$0 \leq G(x) + \ln 2 \leq \frac{x^2 - x}{\ln x}$$

c) Calculer alors F(0)

Exercice 13 :

1° Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par

$$\begin{cases} f(x) = x\ln x\ , \ si\ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
b) Dresser le tableau de variations de f.
c) Donner une équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse 1.

2° a) En utilisant la relation $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}dt$, montrer que pour tout réel $x > 0$, $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$

b) En déduire la position relative de C_f et T.
c) Tracer T et C_f dans un même repère orthonormé

3° Soit F la fonction définie par $F(x) = \int_1^x f(t)\ dt$.

a) Justifier l'existence de F(x) pour tout $x \geq 0$
b) Calculer F(x) pour $x > 0$
c) En déduire que $F(0) = \frac{1}{4}$.

4° Calculer l'aire de la région limité par la courbe de f et les droites d'équations : $y = x - 1$ et $x = 0$

Exercice 14:(4 points)

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$

par : $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = \frac{1}{x} - \frac{\ln(1+2x)}{2x^2};\ x > 0 \end{cases}$

1) Soit $x \geq 0$, montrer que pour tout $t \in [0, x]$ on a : $\frac{1}{1+2x} \leq \frac{1}{1+2t} \leq 1$
2) Soit $x > 0$

a/ Montrer que $f(x) = \frac{2}{x^2}\int_0^x \frac{t}{1+2t}dt$

b/ Montrer que $\frac{1}{1+2x} \leq f(x) \leq 1$ et en déduire que f est continue à droite de 0

3) Montrer que pour tout $x \geq 0$;
$\int_0^x \frac{2t}{1+2t}dt = \frac{x^2}{1+2x} + 2\int_0^x (\frac{t}{1+2t})^2 dt$

4) Soit $x > 0$

a/ Montrer que $f'(x) = \frac{-4}{x^3}\int_0^x (\frac{t}{1+2t})^2 dt$

b/ En utilisant 1) montrer que $\frac{-4}{3} \leq f'(x) \leq \frac{-4}{3(1+2x)^2}$

c/ Déduire que ; $\frac{-4x}{3} \leq f(x) - 1 \leq -\frac{4x}{3(1+2x)^2}$

d/ En déduire que f est dérivable à droite de 0 et préciser le nombre dérivé à droite de 0.

5) Construire la courbe C de f dans un repère orthonormé.

Exercice 15 : (6 points)

1) Soit f la fonction numérique définie sur IR par
$f(x) = \ln(x - 1 + \sqrt{x^2 - 2x + 2})$

On désigne par (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Montrer que le point I(1, 0) est un centre de symétrie de la courbe (C).

b) Montrer que f est dérivable sur IR et que
$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}$.

2) Soit n un entier naturel non nul et (u_n) la suite réelle définie sur IN par :

$u_0 = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{t^2 - 2t + 2}}dt$, $u_n = \int_0^2 \frac{(t-1)^{2n}}{\sqrt{t^2 - 2t + 2}}dt$, n>0

Soit $I = \int_0^2 \sqrt{t^2 - 2t + 2}\,dt$.

a) Calculer u_0.

b) Montrer que $u_0 + u_1 = I$.

c) Montrer que $u_1 + I = 2\sqrt{2}$.

d) En déduire u_1.

e) Montrer que pour tout entier naturel non nul n,
$\frac{\sqrt{2}}{2n+1} \leq u_n \leq \frac{2}{2n+1}$.

f) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 16 :

Soit F la fonction définie sur IR* par
$F(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)}dt$.

1) Montrer que F est impaire.

2) Pour tout x > 0, on pose $g(x) = \int_1^x \frac{1}{\ln(1+t^2)}dt$.

a/ Vérifier que $F(x) = g(2x) - g(x)$; pour tout x > 0.

b/ Montrer que g est dérivable sur IR*+ puis calculer F'(x) pour tout x > 0.

c/ En Déduire le sens de variations de F sur]0, +∞[.

3) On admet que pour tout x > 0, il existe un réel $c \in]x, 2x[$ tel que $F(x) = \frac{x}{\ln(1+c^2)}$.

a/ Montrer que, pour tout x > 0 ; $\frac{x}{\ln(1+4x^2)} < F(x) < \frac{x}{\ln(1+x^2)}$.

c/ Déterminer alors les limites suivantes :
$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{x}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$; $\lim\limits_{x \to 0^+} F(x)$.

4) a/ Dresser le tableau de variations de F.

b/ Tracer l'allure de la courbe C de F dans un repère orthonormé. (On donne $F(\sqrt{2}) \cong 0.7$)

Exercice 17 :(6 points)

n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Soit la fonction g_n définie sur $[n, +\infty[$ par ;
$g_n(x) = \int_n^x \frac{1}{lnt}dt$.

1) Etudier le sens de variations de g_n sur $[n, +\infty[$.

2) a) Montrer que pour tout $t \geq 1; \ln(t) \leq t - 1$

b) En déduire que pour tout $x \geq n$;
$g_n(x) \geq \ln(\frac{x-1}{n-1})$.

c) Dresser alors le tableau de variation de g_n.

3) a) Montrer que g_n réalise une bijection de $[n, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Déduire que pour tout $n \geq 2$ il existe unique réel $u_n \geq n$ tel que $\int_n^{u_n} \frac{1}{lnt}dt = 1$.

4) On considère la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ définie dans 3) b).

a) Mque pout tout $n \geq 2$; $\int_{u_n}^{u_{n+1}} \frac{1}{lnt}dt = \int_n^{n+1} \frac{1}{lnt}dt$.

b) Déduire que la suite u est croissante.

c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 18 :(6 points)

Soit f la fonction définie sur]1, + ∞[par :
$f(x) = -\ln(x^2 - 1)$

1)a) Etudier les variations de f.

b) Tracer la courbe (C) de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

2) a) Montrer que f admet une fonction réciproque g définie sur un intervalle J à préciser.

b) Calculer les limites :
(1) $\lim_{x\to 0} \frac{g(x)-\sqrt{2}}{x}$ et (2) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{g(x)}$.

c) Prouver que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha \in]1, \sqrt{2}[$.

3)a) Tracer la courbe (C') de g dans le même repère que f.

b)A l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $\int_{\alpha}^{\sqrt{2}} f(t)\ dt = -\alpha^2+\alpha+2\int_{\alpha}^{\sqrt{2}} \frac{t}{t+1}\ dt$.

c) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par (C') et les droites d'équations (x=0),(x= α),et (y=0).

Montrer que A = $\alpha^2 + \int_{\alpha}^{\sqrt{2}} f(t)\ dt$ puis déduire A en fonction de α.

4)Soit n ∈ IN* , on considère la fonction F_n définie sur]1, + ∞[par :

$F_n(x) = \int_0^{f(x)} (g(t))^n\ dt$ et $u_n = F_n(\alpha)$

a) Interpréter graphiquement u_1 et u_2 .
b) Montrer que pour tout n de IN* ; $u_n \geq \alpha^{n+1}$.
Déduire la limite de la suite u.
5) a)Etudier le sens de variations de F_n sur]1, + ∞[.
b) Montrer que : $f(x) \leq F_n(x)$; $\forall x \in]1,\sqrt{2}]$ et $F_n(x) \leq f(x)$; $\forall x \in [\sqrt{2}, +\infty[$
c) Dresser alors le tableau de variation de F_n .

Exercice 19 :TN 2017

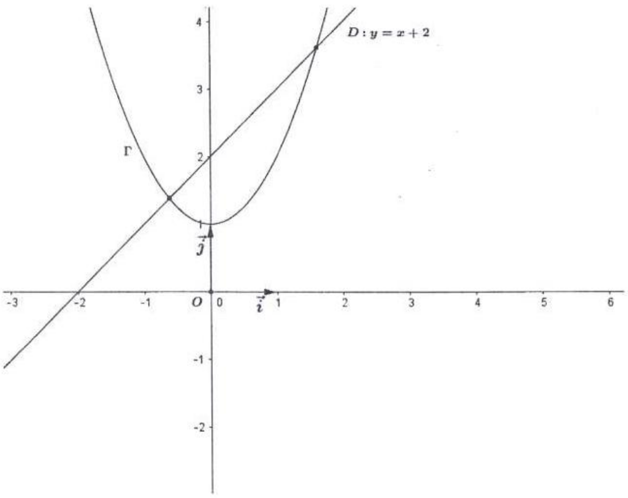

Figure 2

Soit f la fonction définie sur]0, +∞[par f(x)= $\ln\left(\frac{x^2}{1+x}\right)$

On désigne par Cf sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, i, j).

A) 1) a) Calculer $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ Interpréter graphiquement

b) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et montrer que $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement.

2) a) Montrer que pour tout x ∈]0, +∞[;
$f'(x) = \frac{x+2}{x(x+1)}$

b) Dresser le tableau de variation de f.
c) Montrer que f réalise une bijection de]0, +∞[sur un intervalle J que l'on précisera.
3) a) Résoudre dans IR l'équation : $x^2 = x+1$.
b) On note a la solution positive . Vérifier que la deuxième solution est égale à $\frac{-1}{a}$.
c) Montrer que la courbe Cf coupe l'axe des abscisses au point A d'abscisses a.
d) Montrer qu'une équation de la tangente T à Cf au point A est : $y = \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a^3}\right)(x-a)$
e) Vérifier que la tangente T passe par B(0, $-1-\frac{1}{a^2}$)
4) Dans la figure ci-dessous , on a tracé , la droite D : y=x+2 et la courbe de la fonction x :→ x^2+1
a) Construire les points A et B.
b) Construire la tangente T et tracer la courbe Cf.

B) Soit n un entier naturel non nul.
On pose pour tout $x \geq 1$; $G_n(x) = \int_1^x f(t^n)\, dt$
1) a)Mq ∀ x ≥ 1 ;
$(x-1)\ln\left(\frac{1}{2}\right) \leq G_n(x) \leq (x-1)f(x^n)$
b) Mq ∀ x ≥ 1

$$G_n(x) = xf(x^n) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) - n(x-1) - \int_1^x \frac{n}{1+t^n}dt$$

2) On pose $J_n = n\int_1^{\sqrt[n]{a}} \frac{1}{1+t^n}dt$
a) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$
b) En utilisant B) 1)a),
montrer que $\lim_{n\to+\infty} G_n(\sqrt[n]{a}) = 0$
c) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{a}-1}{\frac{1}{n}} = \ln(a)$.
d) Déterminer alors $\lim_{n\to+\infty} J_n$.