Lycée Pilote Sfax A/S : 2020-2021	**Série N°28** (Fonctions logarithme népérien)	4 ème Math Mr Jellali

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f_n la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $f_n(x) = \dfrac{1}{1+x^n} - \ln(1+x)$.

Soit (C_n) la représentation graphique de f_n dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1)a) Dresser le tableau de variation de f_1. Montrer que l'équation $f_1(x)=0$ admet dans $]-1,+\infty[$ une solution unique α et que $0<\alpha<1$.

b) Tracer la courbe (C_1) de f_1.

c) Calculer l'aire de la partie limitée par (C_1) et les droites d'équations : $y=0$; $x=1$ et $x=e-1$.

2)a) Etudier les positions relatives de (C_n) et (C_{n+1}) suivant la parité de n.

b) Soit A_n l'aire de la partie du plan limitée par (C_n), (C_{n+1}) et les droites d'équations : $x=0$ et $x=1$.

Montrer que $0 \le A_n \le \dfrac{1}{n+1}$ puis déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $[0,e]$ par $\begin{cases} f(x) = x\sqrt{1-\ln x} & \text{si } x \in]0,e] \\ f(0)=0 \end{cases}$

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

① Montrer que f est continue à droite en 0.

② a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter le résultat graphiquement.

b) Etudier la dérivabilité de f à gauche en e et interpréter le résultat graphiquement.

③ a) Montrer que pour tout $x \in]0,e[$, $f'(x) = \dfrac{1-2\ln x}{2\sqrt{1-\ln x}}$.

b) Vérifier que $f(\sqrt{e}) = \sqrt{\dfrac{e}{2}}$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

④ Soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $g(x)=\sqrt{x}$.

On désigne par C_g la courbe représentative de g dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a) Montrer que C_f et C_g ont la même tangente T au point d'abscisse 1.

b) Montrer que pour tout $x \in]0,e]$, $x(1-\ln x) \le 1$.

c) En déduire la position relative de C_f et C_g.

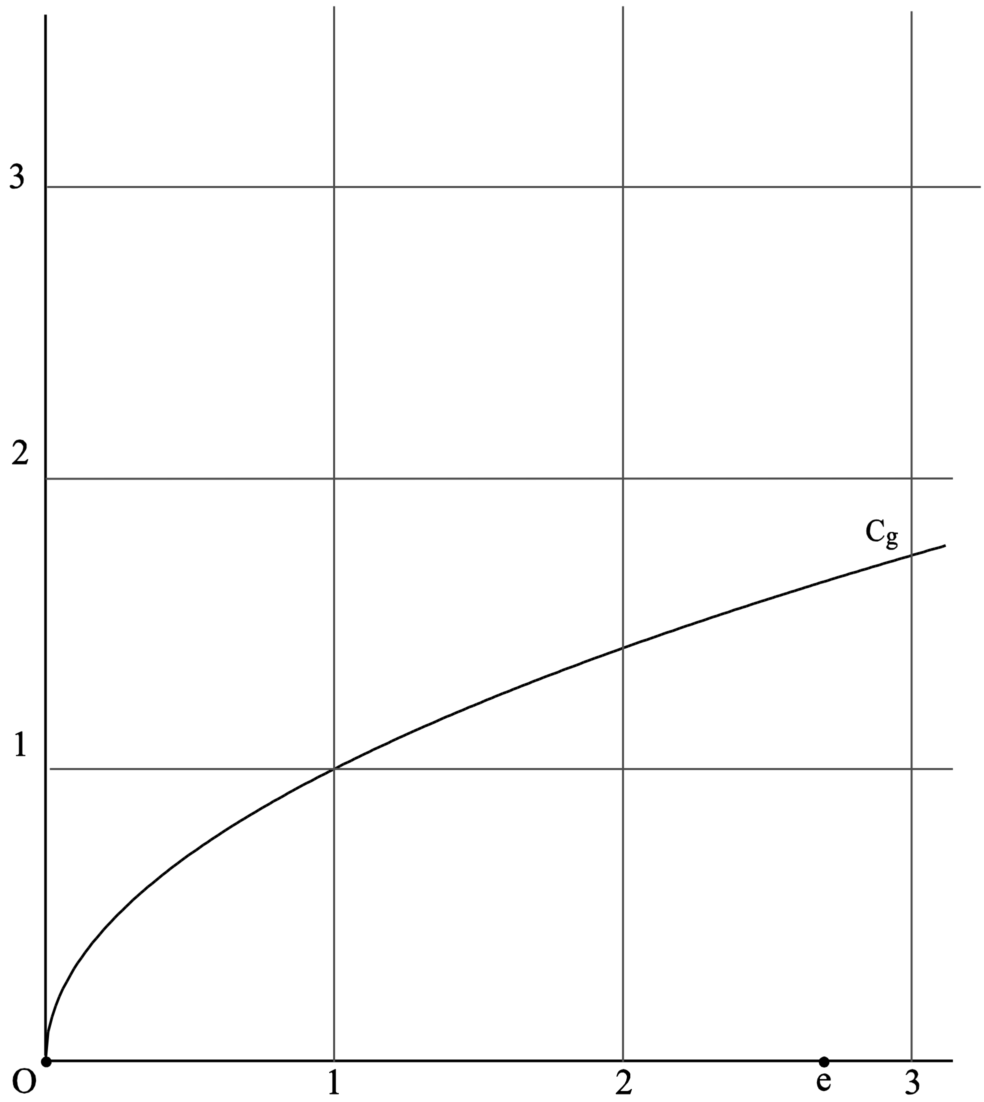
d) Dans l'annexe ci-jointe, on a tracé la courbe C_g.

Construire le point de C_f d'abscisse $\sqrt{e}$ puis tracer T et C_f.

⑤ a) Montrer que pour tout $x \in [1,e]$, $0 \le \sqrt{x - x\ln x} \le \sqrt{x}$.

b) Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par C_f, C_g et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.

Montrer que $\mathcal{A} \le \dfrac{2}{3}\sqrt{e^3} - \dfrac{2}{3}$.



3
2
1
O
1
2
e
3
C_g