Lycée Pilote Sfax	Série N°29	4ème Math
A/S : 2020-2021	(Fonctions logarithme népérien)	Mr Jellali

Exercice 1

① Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=1-x^2(1+\ln x)$.

a) Dresser le tableau de variation de g.

b) Calculer $g(1)$ puis déterminer le signe de g.

② Soit f la fonction définie sur $]0,\pi[$ par $f(x)=\cos(x)\ln(\sin x)$.

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a) Dresser le tableau de variation de f et tracer C_f.

c) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par C_f et les droites d'équations $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{5\pi}{6}$ et $y=0$.

Exercice 2

On considère la fonction F définie sur $]0,+\infty[$ par $F(x)=\int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt$.

1) Montrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et préciser $F'(x)$.

2) Vérifier que pour tout $t\geq 1$ on a $\frac{\ln t}{(1+t)^2}\leq\frac{\ln t}{1+t^2}\leq\frac{\ln t}{t^2}$.

3)Pour tout $x>0$ on pose $I(x)=\int_1^x\frac{\ln t}{t^2}\,dt$ et $J(x)=\int_1^x\frac{\ln t}{(1+t)^2}\,dt$.

a) Calculer I(x).

b) A l'aide d'une intégration par parties calculer J(x).

4) Déduire que pour $x>1$, on a : $\ln 2+\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)-\frac{\ln x}{x+1}\leq F(x)\leq 1-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}$.

5) On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=l$, vérifier que $\ln 2\leq l\leq 1$.

6) Soit G la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $G(x)=F\left(\frac{1}{x}\right)-F(x)$.

a) Montrer que G est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer $G'(x)$.Déterminer alors G(x).

b) Déterminer alors la limite de F à droite en 0.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $]-\infty,1[$ par $f(x)=-\ln(1-x)$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$, $S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)$ et $I_n=\int_0^{1-\frac{1}{n}}f(t)\,dt$.

1. Montrer que Pour tout $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$, $I_n=1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right)$.Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n$.

2. a. Etudier les variations de f.

   b. Soit $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$ et $k\in\{0,1,\ldots\ldots,n-2\}$, montrer que $\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\leq\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}f(x)\,dx\leq\frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right)$.

   c. En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$, $S_n+\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right)\leq I_n\leq S_n$.

   d. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$, $I_n\leq S_n\leq I_n-\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right)$.

3. Montrer que $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$, $S_n=\ln\left(\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\right)$. En déduire que $\lim\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=e$.