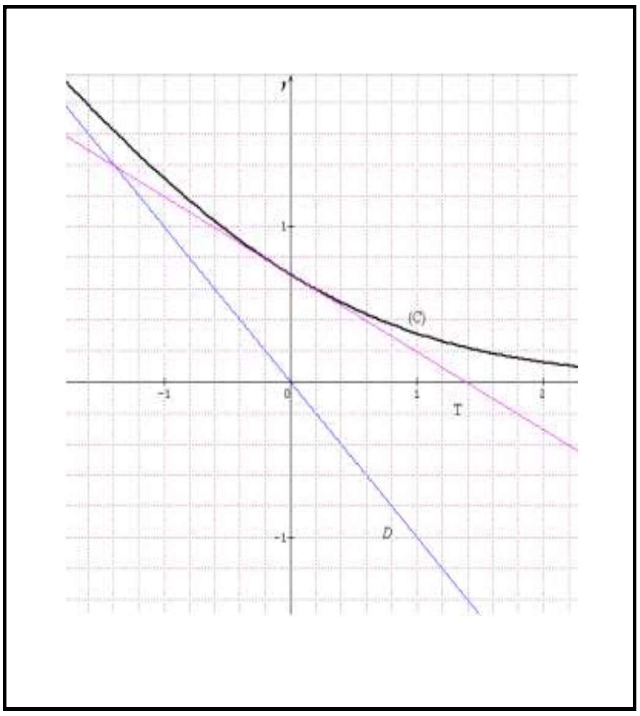
Lycée pilote Bourguiba de Tunis	Série de revision 1 expo et ln
Mr:Barhoumi	4ème Math 2021

Exercice 1 :

A. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\ln\left(1+e^{-x}\right)$

.On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (unités graphiques : 4 *cm*).



1. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

2. Montrer que (C) admet une asymptote D d'équation : $y=-x$. Préciser la position de D par rapport à (C).

3. Déterminer une équation de la tangente T à (C) au point d'abscisse 0.
Ci-contre on a tracer D, T et (C).

4. Soit x_0 un nombre réel non nul. On note M et N les points de (C) d'abscisses respectives x_0 et $-x_0$.

a) Vérifier que : $f(x_0)-f(-x_0)=-x_0$.

b) Calculer le coefficient directeur de la droite (MN) . Que peut-on en conclure ?

c) Montrer que les tangentes à (C) en M et N se coupent sur l'axe des ordonnées.

d) Illustrer sur la courbe (C) les résultats précédents en prenant $x_0=1$.

B. Soit la suite de nombres réels (u_n) , définie par : $\begin{cases} u_1=1+\dfrac{1}{e} \\ u_{n+1}=u_n\left(1+\dfrac{1}{e^{n+1}}\right);\forall n\in\mathbb{N}^* \end{cases}$

1. a) Montrer par récurrence que, pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$: $u_n>0$.

b) Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

c) Montrer par récurrence que, pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$: $\ln(u_n)=\sum_{k=1}^{n}f(k)$ $\quad(1)$

2. a) montrer que pour tout réel x de $[0,+\infty[$, $1-x\le\dfrac{1}{x+1}\le 1$

b) En déduire que, pour tout réel t de $[0,+\infty[$, $t-\dfrac{1}{2}t^2\le\ln(1+t)\le t$.

c) En déduire que pour tout réel x : $e^{-x}-\dfrac{e^{-2x}}{2}\le f(x)\le e^{-x}$ $\quad(2)$

3. a) Soit a est un réel strictement supérieur à 1. Calculer, pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, $S_n = \frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}+.......+\frac{1}{a^n}$ et montrer que la suite (S_n) admet une limite que l'on déterminera.

b) On pose, pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$: $A_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{e^k}$ et $B_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{e^{2k}}$. A l'aide des relations (1) et (2), montrer que : $A_n - \frac{1}{2}B_n \le \ln(u_n) \le A_n$. c) En déduire que la suite $(\ln(u_n))$ est majorée.

4) a) Montrer que la suite (u_n) est convergente. On note l sa limite.

b) Montrer que : $\frac{2e+1}{2(e^2-1)} \le \ln(l) \le \frac{1}{e-1}$. En déduire une valeur approchée de l à 0,1 prés.

Exercice 2 :

A/ Questions préliminaires

1/ Montrer que l'équation : $x^3+2x-1=0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique x_0 et que $x_0 \in]0,1[$.

2/ Montrer que : $\forall x \in]-1,+\infty[$,on a : $\ln(1+x) \le x$

3/ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln(1+x^2)}{x}; & si\ x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

B/ Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x)=\int_x^{x^2} f(t)\,dt$. (f étant la fonction définie dans A)

1/ a) Montrer que F est paire.

b) Calculer F(0) et F(1) . Déterminer le signe de F(x) sur chacun des intervalles $]0,1[$ et $]1,+\infty[$

2/ a) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que : $\begin{cases} F'(x)=\dfrac{2\ln(1+x^4)-\ln(1+x^2)}{x}; & si\ x\neq 0 \\ F'(0)=0 \end{cases}$

b) Montrer que F' est continue sur $\mathbb{R}$.

3/ a) Montrer que l'équation F'(x) = 0 admet dans $]0,+\infty[$ une solution unique α et que $\alpha \in]0,1[$.

b) Montrer que F est décroissante sur $[0,\alpha]$ et que F est croissante sur $[\alpha,+\infty[$.

4/ a) Montrer que : $\forall x \in]0,+\infty[$, on a $F(x)+F\left(\frac{1}{x}\right)=3(\ln x)^2$. b) Calculer $\lim_{x\to+\infty} F(x)$.

5) a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, calculer $\int_x^{x^2}\frac{\ln(t^2)}{t}dt$; en déduire que $F(x)-3(\ln x)^2 = \int_x^{x^2}\frac{\ln(1+t^{-2})}{t}dt$.

b) Montrer que : $\forall x \in]1,+\infty[$, $3(\ln x)^2 \le F(x) \le 3(\ln x)^2+\frac{1}{2x^2}$. c) Calculer $\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}$.

6/ Soit Γ la courbe représentative de F dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Donner une allure de Γ . (on donne $\alpha \simeq 0,7$; $F(\alpha) \simeq -0,1$ et $F(2) \simeq 1,5$).

Exercice3 :

On considère la fonction f définie par : $f(x)=xe^x$. On note (C) la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. a) Etudier f .Préciser le point d'inflexion de (C) et la tangente au point O. b) Construire (C).

2. Soit E_n l'ensemble des points $M(x,y)$ du plan tels que : $-n \le x \le 0$ et $f(x) \le y \le 0$. Calculer A_n l'aire de E_n et calculer sa limite.

3. On définit les suites u et v par : $u_n = \int_0^1 x^n e^x dx$ et $v_n = \sum_{p=1}^{n} u_p - e\ln(n+1)$. a) Calculer u_1 et u_2 .

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $0 \le u_n \le \dfrac{e}{n+1}$.Déduire que u converge vers 0.

4. a) Montrer à l'aide d'une double intégration par parties que , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $u_n = \dfrac{e}{n+2} + \dfrac{u_{n+2}}{(n+1)(n+2)}$.

b) Déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $\dfrac{e}{n+2} \le u_n \le \dfrac{e}{n+1}$ et que ; $e\int_{n+2}^{n+3} \dfrac{dx}{x} \le u_n \le e\int_{n}^{n+1} \dfrac{dx}{x}$.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $e\left(\ln\left(\dfrac{n+3}{n+1}\right) - \ln 3\right) \le v_n \le 0$.

5)a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - e\int_{n+1}^{n+2} \dfrac{dx}{x}$.

b) En déduire que la suite v est décroissante sur ℕ*.
c) Montrer alors que la suite v est convergente et donner un encadrement de sa limite.

Exercice 4 :

A/Soit f la fonction définie sur IR₊ par : $\begin{cases} f(x) = (e^{-x} - 1)\ln x & si\ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

(C)désigne la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1)a)Montrer que f est continue à droite en 0.

b)Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat.

2)Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $g(x) = x\ln x + e^x - 1$.

a)Montrer que l'équation g'(x)=0 admet dans $\mathbb{R}_+^*$ une solution unique α et que $0{,}1 < \alpha < 0{,}2$ puis donner le signe de g'(x) dans $\mathbb{R}_+^*$ .b)Dresser le tableau de variation de g, en déduire que l'équation g(x)=0 admet dans $\mathbb{R}_+^*$ une solution unique β et que $0{,}3 < \beta < 0{,}31$. c)Dresser le tableau de variation de f et tracer (C)(On prend $\beta = 0{,}31$).

B/Soit $\lambda \in]0,1[$. On pose $A(\lambda) = \int_{\lambda}^{1} f(t)\,dt$ et $I_n(\lambda) = \int_{\lambda}^{1} t^n \ln t\ \mathrm{dt}$ avec $n \in \mathbb{N}$.

1)a)A l'aide d'une intégration par partie , calculer $I_n(\lambda)$. b)Montrer que $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} I_n(\lambda) = \dfrac{-1}{(n+1)^2}$.

2)Pour tout t de l'intervalle $[0,1]$, on pose : $\varphi_0(t) = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $\varphi_n(t) = 1 - \dfrac{t}{1!} + \ldots\ldots.. + (-1)^n \dfrac{t^n}{n!}$.

a)Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi'_{n+1}(t) = -\varphi_n(t)$. b)En déduire que : $\forall x \in [0,1]$, $\int_0^x \varphi_n(t)\,dt = 1 - \varphi_{n+1}(x)$.

c)Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi_{2n+1}(t) \le e^{-t} \le \varphi_{2n}(t)$.

d)En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*; \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k!} I_k(\lambda) \leq A(\lambda) \leq \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k!} I_k(\lambda)$.

3)Soit A l'aire de la partie limitée par (C)et les droites d'équations x=0 ,x=1 et y=0.

a)Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*; \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!(k+1)^2} \leq A \leq \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k!(k+1)^2}$ .b)Pour n=2, donner un encadrement de A à 10^{-3} près .

Exercice 5 :

Soit f la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par : $f(x)=(\ln x)^2$.

1)a)Dresser le tableau de variation de f.

b)Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ de f dans un repère orthonormé $(0,\vec{i},\vec{j})$ en précisant la demie tangente au point d'abscisse 1.

2)Montrer que f réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$ et tracer sa courbe $(\mathscr{C}')$ dans le même repère $(0,\vec{i},\vec{j})$.

3)a)Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in [0,+\infty[$.

b)Calculer : $J_2 = \int_1^e f(x)\,dx$, En déduire l'aire de la partie du plan limitée par $(\mathscr{C}')$,l'axe des abscisses et les droites d'équation respectives x=0 et x=1.

4)Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $J_n = \int_1^e (\ln x)^n\,dx$ et $V_n = \left(\sum_{p=1}^{n} J_p\right) - e\ln(n+1)$.

a)Montrer à l'aide d'une intégration par partie que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $J_{n+1} = e-(n+1)J_n$ .En déduire J_3.

b)Montrer que (J_n) est décroissante. c)Déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{e}{n+2} \leq J_n \leq \frac{e}{n+1}$.

d)Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{e}{n+1} \leq e\int_n^{n+1} \frac{dx}{x}$. Prouver alors que : $e\int_{n+2}^{n+3} \frac{dx}{x} \leq J_n \leq e\int_n^{n+1} \frac{dx}{x}$.

e)Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $e\left[\ln\left(\frac{n+3}{n+1}\right) - \ln 3\right] \leq V_n \leq 0$.

5)a)Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $V_{n+1} - V_n = J_{n+1} - e\int_{n+1}^{n+2} \frac{dx}{x}$. b)En déduire que la suite V est décroissante

Exercice 6 :

Soit $n \in \mathbb{N}$ et f_n la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f_n(x) = \frac{1+\ln x}{x^n}$.

On désigne par C_n la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$.

A/ Dans cette partie on suppose que $n \in \mathbb{N}^*$.

1/ a) Montrer que les courbe C_n passent par deux points fixes A et B ($x_A \prec x_B$).

b) Etudier la position relative de C_n et C_{n+1} .

2/ Dresser le tableau de variation de f_n .

3/ a) Tracer dans le même repère orthonormé $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ C_1 et C_2 .

b) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par C_1 et C_2 et les droites d'équations $x=\dfrac{1}{e}$ et $x=1$.

B/ On suppose dans cette partie que n = 0 et on pose $F\left(x\right)=\int_1^x f_0\left(t\right)dt$ pour tout $x \geq 1$.

1/a) Montrer que : $\forall\ x \in \left[1,+\infty\right[\quad F\left(x\right)=x\ln x$.

b) Montrer que F réalise une bijection de $\left[1,+\infty\right[$ sur un intervalle J que l'on précisera .

2 / Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que l'équation F(x) = k admet dans $\left[1,+\infty\right[$ une solution unique α_k . Calculer α_0 .

3/a) Montrer que la suite $\left(\alpha_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et qu'elle diverge vers $+\infty$.

b) Montrer que : $\forall\ k \in \mathbb{N}$, $\int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} f_0\left(t\right)dt=1$.

c) En utilisant le théorème de la moyenne , montrer que qu'il existe
$\beta_k \in \left[\alpha_k,\alpha_{k+1}\right]$ tel que $f_0\left(\beta_k\right)=\dfrac{1}{\alpha_{k+1}-\alpha_k}$.

En déduire que $\lim\limits_{k\to+\infty}\left(\alpha_{k+1}-\alpha_k\right)=0$.

C/ On considère la suite $\left(S_n\right)$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, $S_n=\sum\limits_{k=2}^{n}\dfrac{\ln k}{k^2}=\dfrac{\ln 2}{2^2}+\dfrac{\ln 3}{3^2}+\ldots+\dfrac{\ln n}{n^2}$.

1/a) Etudier les variations de la fonction $\varphi : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^2}$ sur $\left]0,+\infty\right[$.

b) En déduire que pour tout entier naturel $k \geq 2$, on a $\varphi\left(k+1\right) \leq \int_k^{k+1}\varphi\left(t\right)dt \leq \varphi\left(k\right)$.

2/a) Montrer que : $\forall n \geq 2$, $S_n-\varphi\left(2\right) \leq \int_2^n \varphi\left(t\right)dt \leq S_n-\varphi\left(n\right)$.

b) En déduire que : $\forall n \geq 2$, $\int_2^n \varphi\left(t\right)dt+\dfrac{\ln n}{n^2} \leq S_n \leq \int_2^n \varphi\left(t\right)dt+\dfrac{\ln 2}{2^2}$.

c) Calculer $\int_2^n \varphi\left(t\right)dt$, en déduire que la suite $\left(S_n\right)$ est majorée .

3 /a) Etudier la monotonie de la suite (S_n) , en déduire qu'elle est convergente .

b) Soit L la limite de S_n . Montrer que : $\ln\sqrt{2e} \leq L \leq \ln\sqrt[4]{8e^2}$.