Exercice n°1 :

A] Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

$(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f ds R.O.N $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1°) a) Mq f est continue à droite en 0.

b) Mq f est dérivable à droite en 0. Interpréter graphiquement.

c) Mq f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $f'(x) = \frac{1}{x^3}e^{-\frac{1}{x}}$, $\forall x \in]0,+\infty[$.

2°) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, Interpréter graphiquement.

b) Dresser T.V de f.

3°) a) Mq $I\left(\frac{1}{3}, 4e^{-3}\right)$ est un point d'inflexion de $(\mathcal{C}_f)$.

b) Écrire une équation de la tangente T à $(\mathcal{C}_f)$ au pt I.

4°) Dans l'annexe ci-jointe on a représenté dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe Γ de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{-x}$.

Construire le point I, la tangente T et la courbe de $\mathcal{C}_f$.

B] Soit F la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $F(x) = \int_x^1 f(t)\,dt$.

1°) Mq F est dérivable sur $[0,+\infty[$ et déterminer $F'(x)$.

2°) a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$\forall x>0$, $\int_x^1 e^{-\frac{1}{t}}\,dt = e^{-1} - xe^{-\frac{1}{x}} - \int_x^1 \frac{1}{t}e^{-\frac{1}{t}}\,dt$.

b) Montrer alors que $F(x) = \int_x^1 f(t)\,dt = e^{-1} - xe^{-\frac{1}{x}}$, $\forall x>0$

c) En déduire que $\int_0^1 f(t)\,dt = e^{-1}$

3°) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C}_f)$ la droite des abscisses et les droites d'équation : $x=0$ et $x=2$.

4°) Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $U_n = F(n) - F(n+2)$

a) Mq en utilisant le théorème des accroissements finis, que pour tout entier naturel n, il existe un réel $v_n \in]n, n+2[$ tel que $U_n = 2\left(1+\frac{1}{v_n}\right)e^{-\frac{1}{v_n}}$.

b) Mq $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $2\left(1+\frac{1}{n+2}\right)e^{-\frac{1}{n}} \leq U_n \leq 2\left(1+\frac{1}{n+2}\right)e^{-\frac{1}{n+2}}$.

c) En déduire la limite de la suite (U_n).

C) 1°) a) Mq $\forall n \in \mathbb{N}^*$ il existe un seul réel a_n tel que $f(a_n) = e^{-\frac{1}{n}}$.

b) Mq $(a_n)_{n\geq1}$ est croissante.

c) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $-\frac{1}{a_n} + \ln\left(1+\frac{1}{a_n}\right) = -\frac{1}{n}$.

2°) a) Mq $\forall\, t \in [0,+\infty[$ $1-t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1-t+t^2$

b) Mq $\forall\, x \geq 0$ $-\frac{x^2}{2} \leq -x + \ln(1+x) \leq -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

Exercice n°2

Soit F la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $F(x) = e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$.

1°) a) Mq $\forall x \geq 0 \quad 0 \leq F(x) \leq xe^{-x^2}$ puis déduire $\lim_{x\to+\infty} F(x)$.

b) Mq $e^{-x^2} \leq e^{-x} \quad \forall x \geq 1$

2°) Mq F est dérivable sur $[0,+\infty[$ et on a $\forall x \geq 0 \quad F'(x) = e^{-2x^2} - 2xF(x)$.

3°) Soit G la fonction définie sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ tq $\begin{cases} G(x) = F(\tan x) \\ G(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$

a) Mq G est continue à gauche en $\frac{\pi}{2}$.

b) Mq il existe $c \in]0,+\infty[$ tel que $F(c) = \frac{1}{2c}e^{-2c^2}$ et $F'(c) = 0$.

4°) Soit H la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $H(x) = F'(x)\cdot\frac{e^{x^2}}{2x}$.

a) Mq H est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$

b) Déduire que c est unique et Donner le tableau de variation de F

Exercice n°3 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = e^{-\sqrt{x}}$.

1°) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter graphiquement

b) Dresser T.V de f.

c) Tracer la courbe de f dans un R.O.N $(O,\vec{i},\vec{j})$

2°) a) Mq f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Tracer la courbe $\mathcal{C}'$ de f^{-1} sur un même repère que $\mathcal{C}$.

3°) a) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

b) Interpréter graphiquement l'intégrale $I = \int_0^1 e^{-\sqrt{t}}dt$

c) Calculer $\int_{e^{-1}}^1 f^{-1}(t)\,dt$ et en déduire la valeur de I.

4°) Soient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $I_n = \int_1^n e^{-\sqrt{t}}dt$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$.

a) Etudier la monotonie de (S_n)

b) Mq $\forall n \in \mathbb{N}^*\setminus\{1\} \quad \int_n^{n+1} f(t)\,dt \leq f(n) \leq \int_{n-1}^n f(t)\,dt$

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $I_{n+1} - I_2 \leq S_n - \frac{1}{e} \leq I_n$

5°) Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $F(x) = \int_0^{\sqrt{x}} 2te^{-t}dt$

a) Justifier que F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer $F'(x)$

b) En déduire que $\forall x \geq 0$, $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

c) Calculer $\int_0^{\sqrt{x}} te^{t}dt$ et en déduire l'expression de $F(x)$ sur $\mathbb{R}_+$

d) Exprimer alors I_n en fct de n et calculer sa limite en $+\infty$

e) En déduire que la suite (S_n) est convergente.