Toute personne croyant qu'une croissance exponentielle peut durer indéfiniment dans un monde fini est soit un fou, soit un économiste. ***Kenneth Ewart Boulding***

Exercice 1 :

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2e^x+2}{e^x-3}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} (2e^{2x}-e^x+1)$,

$\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2+1)e^{-x}$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^{x\ln x}$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-1}{x} e^{\frac{1}{x}}$

; $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{xe^{-x-1}+1}{x+1}$; $\lim\limits_{+\infty} e^{-x}\ln(1+e^{2x})$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x\ln(1+e^{2x})$ $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^x-x^n)$,

Exercice 2 :

1°) Donner une primitive des fonctions suivantes :

$f(x) = x e^{x^2}$, $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$, $g(x) = \dfrac{e^x}{1+e^{-x}}$

$f(x) = e^{2x}\sqrt{1+e^{2x}}$; $f(x) = \sin x\, e^{\cos x}$.

2) Résoudre l'équation : $5\,\mathbf{e}^{4x} - 13\,\mathbf{e}^{2x} - 6 = 0$.

3) Soit f la fonction définie sur]0 ; +∞[par :

$f(x) = \frac{e^x+1}{e^x-1}$

1) Calculer la dérivée f'

2) En déduire le tableau de variation de f

Exercice :3

A) $\forall n\in\mathbb{N}^*$, on note $f_n(x) = \dfrac{x^n e^{-x}}{n!}$, C_n sa courbe

1) Etudier les variations de f_n sur IR+

2) $\forall n\geq 2$, étudier la position relative de $\mathcal{C}_n$ et $\mathcal{C}_{n-1}$ et vérifier que le point $A_n(n, f_n(n))\in C_{n-1}$.

3) Construire C_1 et C_2.

B) Soit u la suite définie $\forall n\in\mathbb{N}^*$ par $u_n=f_n(n)$

a) En utilisant les résultats de la partie A, démontrer que u est décroissante.

b) La suite u est-elle convergente ?.

2) Soit $g(t)=\ln(1+t)-t+\dfrac{t^2}{4}$, $t\in [0, 1]$

a) Etudier les variations de g et

montrer que $\forall t\in[0, 1]$ on a : $\ln(1+t)\leq t - \dfrac{t^2}{4}$

b) En déduire que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, on a $(1+\frac{1}{n})^n \leq e^{1-\frac{1}{4n}}$

3) Démontrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, on a : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq e^{-\frac{1}{4n}}$

En déduire que $\forall n\geq 2$, on a $u_n \leq e^{-1-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-2}+\ldots+\frac{1}{2}+1\right)}$

4) Démontrer que $\ln(n)\leq 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n-2}+\dfrac{1}{n-1}$

5) En déduire que $\forall n\geq 2$, on a : $u_n\leq e^{-1-\frac{1}{4}\ln(n)}$

Quelle est la limite de u.

Exercice 4:

Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = e^{-2x} - 2e^{-x}$.

1) Dresser le tableau de variation de f.

2) Soit g la restriction de f à $]-\infty;0]$

a) Montrer que g réalise une bijection de $]-\infty;0]$ sur un intervalle I que l'on précisera.

B) Montrer que pour tout x є I on a

$g^{-1}(x) = -\ln(1+\sqrt{1+x})$.

3) On donne ci-dessous la courbe représentative de C [1] de g $^{-1}$ dans un repère orthonormé.

a) Tracer C la courbe représentative de f.

b) Calculer l'aire de la partie du plan limité par C et les droites x =- ln(2) ; x = 0 et y = 0.

c) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{-1}^{0} \ln(1+\sqrt{1+x})\,dx$.

Exercice 5:

A) Soit $g(x)=(x-1)e^x+1$

1) Etudier les variations de g et construire sa courbe C dans un r.o.n

2) Etudier la position relative de C et de D : y=x

3) Calculer l'aire de la partie du plan comprise entre C et D

B/ Soit $a \in \mathbb{R}$, on pose $I(a) = \displaystyle\int_0^a \frac{(t-a)^2}{2} e^t\,dt$

1°) Mque $0 \leq I(a) \leq e^a.\dfrac{a^3}{6}$, a > 0 ;

en déduire $\lim\limits_{a\to 0^+} \dfrac{I(a)}{a^2}$

2°) Mque $0 \leq |I(a)| \leq \dfrac{|a|^3}{6}$ si a < 0 ;

déduire $\lim\limits_{a\to 0^-} \dfrac{I(a)}{a^2}$

3°) En calculant I(a) par une double intégration par partie montrer que : $e^a = 1+a+\dfrac{a^2}{2} + I(a)$

C/ Soit h la fonction définie par : $\begin{cases} h(x) = \dfrac{-1+e^{2x}}{x}, & x>0 \\ h(0)=2 \end{cases}$

1) Mque h est continue et dérivable en 0.

2) Etudier les variations de h

3) Soit $F(x)=\displaystyle\int_1^{\ln x} h(t)\,dt$ l, $x \geq 1$:

Mque F est dérivable sur [1, ∞[et calculer F'(x)

5)a)Mque $\forall x>3$, on a $F(x) \geq \int_1^{\ln x} \frac{2t-1}{t}dt$

b)En déduire $\lim_{x\to+\infty} F(x)$

c)Dresser le tableau de variation de F,
Calculer F(e) et déduire le signe de F

6)Montrer que $\forall x>1$: $F(x)= \int_e^x \frac{t^2-1}{t\ln t}dt$

7)a)Montrer que $\forall x \geq 9$, $F(x) \geq \int_{\frac{x}{3}}^x \frac{t^2-1}{t\ln t}dt$

b)M qu'il existe $\alpha \in [\frac{x}{3}, x]$ tel que $F(x) \geq \frac{2x}{3}\frac{\alpha^2-1}{\alpha\ln(\alpha)}$

c) Déterminer $\lim_{x\to+} \frac{F(x)}{x}$ puis Construire la courbe β de F.

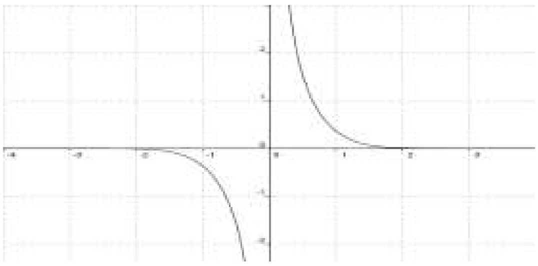
Exercice 6 : (6 points)

On a représenté ci-dessous la fonction g définie sur $R \setminus \{0\}$ par : $g(t) = \frac{1}{t}e^{-t^2}$

On considère la fonction F définie sur R par :

$$\begin{cases} F(x) = \int_x^{2x} g(t)dt \ , \quad \text{si } x \neq 0 \\ F(0) = \ln(2) \end{cases}$$

1) Pour a > 0, interpréter F(a) et F(−a) en terme d'aires. En déduire que F est paire.



2) a) Montrer que F est dérivable sur]0, +∞[et que $F'(x) = \frac{e^{-4x^2}}{x}\left(1 - e^{3x^2}\right)$

b) En déduire le sens de variation de F sur]0, ∞[.

3) a) Montrer que pour tout réel x, $e^x \geq 1 + x$.

b) En déduire que, pour tout réel t > 0, $\frac{1}{t} - t \leq g(t) \leq \frac{1}{t}$

c) Prouver que, pour tout réel x > 0, $\ln(2) - \frac{3x^2}{2} \leq F(x) \leq \ln(2)$

d) Démontrer que F est continue et dérivable en zéro.

4) a) Montrer que, pour tout réel t ≥ 1 ; $e^{-t^2} \leq e^{-t}$

b) En déduire que pour tout réel x ≥ 1, $F(x) \leq \frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}$

c) Déterminer la limite de F en +∞.

5) a) Dresser le tableau de variations de la fonction F sur R.

b) Tracer l'allure de la représentation graphique de F dans un repère orthonormé, unité graphique 4 cm.
(On donne F(0, 5) ≅ 0,4 et F(1) ≅ 0, 1)

Exercice 7:

A/ Soit f la fonction définie sur]0, +∞[par :

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}}$

1)a)Etudier les variations de f.

b)En déduire que pour tout $x \geq \ln\sqrt{2}$, : $0 < f(x) \leq 1$

c)Tracer la courbe C de f.

2)On considère la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ par :

$g(x) = -\ln(\cos x)$

a)Montrer que g est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et calculer g'(x).

b)Montrer que g admet une fonction réciproque h définie sur IR+ .Calculer $h(\ln\sqrt{2})$.

c)Montrer que h est dérivable sur]0, +∞ [et que h' (x) = f (x).

B)Soit $n \in IN^*$ et F_n la fonction définie sur $[\ln\sqrt{2}, +\infty[$ par : $F_n(x) = \int_{\ln\sqrt{2}}^{x} [f(t)]^n dt$

1)a)Montrer que $F_1(x) = h(x) - \frac{\pi}{4}$.

b)Déduire l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C de f et les droites d'équations y = 0, x = ln2 et $x = \ln\sqrt{2}$

c)Vérifier que $f^2(t) = \frac{e^{-2t}}{1-e^{-2t}}$. En déduire $F_2(x)$.

2)a)Vérifier que pour tout $t \geq \ln\sqrt{2}$, on a : $f(t) < 2e^{-t}$.

b)En déduire , en utilisant A- 1, que $F_n(x) \leq \sqrt{2}$.

c)Déduire que la fonction F_n admet une limite finie en +∞.

3)a)Montrer que pour tout $t \geq \ln\sqrt{2}$, on a : $f(t) \geq e^{-t}$

b)En déduire que la limite de la fonction F_n en +∞ est non nulle.

C)On pose $u_n = \lim_{x\to+\infty} F_n(x)$

1)a)Calculer u_1 et u_2.

b)Montrer que la suite u est décroissante.

c)Déduire que la suite u est convergente.

2)a)Vérifier que $f^{n+2}(t) + f^n(t) = -f^{n-1}(t) \cdot f'(t)$

b)En déduire que $F_{n+2}(x)+F_n(x) = \frac{1}{n}[1- f^n(x)]$

c)Montrer alors que $u_{n+2} + u_n = \frac{1}{n}$

d)Déduire que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

3)Soit v la suite définie sur IN par :

$v_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

Toute personne croyant qu'une croissance exponentielle peut durer indéfiniment dans un monde fini est soit un fou, soit un économiste. *Kenneth Ewart Boulding*

a)Montrer que $u_{2n+2} = \frac{(-1)^n}{2}(-v_n + \ln 2)$

b)En déduire la limite de la suite (v_n).

Exercice 8 :

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = x e^{-x}$.

A) 1) Etudier et représenter dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$ la fonction f

2) On désigne par A_n l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectifs x=1 et x= n.

Calculer An puis donner $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n$.

2)Montrer que la restriction de f à [0, 1] réalise une bijection sur un intervalle J que l'on précisera. Soit C' la courbe de sa réciproque. Tracer C' dans le même repère.

Calculer l'aire du domaine limitée par les courbes C , C' et la droite $\Delta : y = -x+1+\frac{1}{e}$

1) Soit u la suite définie sur IN* par

$u_n = \frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} + \dots + \frac{n}{e^n}$

et k un réel supérieur ou égal à 2

a) Montrer que la suite u est monotone.

b) Montrer que $\forall x \in [k,-1, k]$;

$$f(k) \le \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \le f(k-1)$$

c) Prouver alors que :

$$\frac{n}{e^n} + \int_1^n f(x)\,dx \le u_n \le \frac{1}{e} + \int_1^n f(x)\,dx$$

d) En déduire que la suite u est convergente.

B)Soit F la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par

$$F(x) = \int_{\ln x}^{2\ln x} f^2(t)\,dt$$

1)a)Justifier l'existence de F(x) sur $[1, +\infty[$

b)Montrer que F est dérivable sur $[1, +\infty[$ et que

$F'(x) = \frac{(\ln(x))^2}{x^5}(8 - x^2)$

2) a)M que $\forall x \ge 1$ et $\forall t \in [\ln x, 2\ln x]$,

on a : $\frac{t^2}{x^4} \le [f(t)]^2 \le \frac{t^2}{x^2}$

b)Mque $\forall x \ge 1$; on a :

$\frac{7}{3}\frac{(\ln x)^3}{x^4} \le F(x) \le \frac{7(\ln x)^3}{3x^2}$

a) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}(F(x))$

3) Etudier les variations de F et donner l'allure de sa courbe Γ, on précisera la tangente à Γ au point d'abscisse 1.(On donne $F(2\sqrt{2}) \approx 0,11$)

Exercice 9:

Pour tout entier n, on considère la suite (u_n) définie par

$$u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{e^x+1}\,dx$$

1)On pose $v_n = \int_0^1 e^{-nx}\,dx$

a)Calculer v_n

b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} nv_n$.

2)a)Etablir que pour tout $x \in [0, 1]$, on a :

$2 \le 1+e^x \le 2e^x$.

b) En déduire que pour tout n, on a :

$\frac{1}{2}v_{n+1} \le u_n \le \frac{1}{2}v_n$.

c)Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. puis $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n$.

3) On pose $S_n = \sum_{p=1}^{n} u_p$ et $W_n = \sum_{p=1}^{n} v_p$; $n \ge 1$

a)Montrer que $0 \le \sum_{p=1}^{n} \frac{e^{-p}}{p} \le \frac{1}{e-1}$

b) Montrer que pour tout entier naturel $p \ge 1$, on a : $\frac{1}{p+1} \le \ln(p+1) - \ln(p) \le \frac{1}{p}$

c)En déduire que pour tout $n \ge 2$, on a :

$$\ln(n+1) \le \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \le 1+\ln(n)$$

d) Déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} Wn$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Exercice 10:

I – Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1)Montrer que f est dérivable en 0 à droite.

2)Montrer que pour tout x > 0, $f'(x) = \frac{(1-x)e^{-\frac{1}{x}}}{x^3}$

3° Dresser le tableau de variations de f

4° Tracer la courbe C de f dans un repère orthonormé

II – Soit F la fonction ; x > 1 ; $F(x) = \int_1^{\frac{1}{\ln x}} f(t)\,dt$

1)a)Mque F est dérivable sur $]1, +\infty[$ et calculer F ' (x).

b) En déduire que $F(x) = \int_x^e \frac{1}{t^2 \ln t}\,dt$

2° a) Montrer que pour tout réel t > 1, $\ln t < t - 1$

b) En déduire $\forall x \in]1, e[$,

$F(x) \geq \frac{1}{e^2}\int_x^e \frac{1}{t-1}\,dt$

c) Calculer alors la limite de F en 1 à droite.

3° a) Montrer que pour tout x > e, $F(x) \geq -\frac{1}{e}$

b) En déduire que F admet en $+\infty$ une limite finie L

III – Soit φ la fonction définie par $\varphi(x) = \int_1^x f(t)\,dt$

1° Justifier l'existence de $\varphi(x)$ pour tout réel $x \geq 0$.

2° Vérifier que pour tout x > 0, $\varphi\left(\frac{1}{x}\right) = F(e^x)$

3° En déduire que $\varphi(0) = L$

4° Exprimer en fonction de L l'aire A du domaine limité par la courbe C de f et les droites y = 0, x = 0 et x = 1.

Exercice 11

I°) 1°) Soit $g(x) = \sqrt{e^{2x} - 1}$, x > 0

a) Montrer que $\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)}{x} = +\infty$.

Interpréter graphiquement le résultat.

b)Dresser le tableau de variation de g.

2°) Soit G la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$G(x) = g(x) - \int_0^{g(x)} \frac{dt}{1+t^2}$

a)Mque G est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que $G'(x) = g(x)$

b)Montrer alors que pour tout réel strictement positif x, $\int_0^x g(t)dt = g(x) - \int_0^{g(x)} \frac{dt}{1+t^2}$

a) On admet que $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$.

b) Déduire que $\int_0^{\ln\sqrt{2}} g(t)dt = 1 - \frac{\pi}{4}$

II°) Pour tout $n \in IN^*$, on pose :

$I_n = \int_0^{\ln\sqrt{2}} (g(x))^n\,dx$ et $I_0 = \ln\sqrt{2}$

1°)a) Vérifier que pour tout entier naturel non nul n et pour tout réel positif x, on a:

$(g(x))^n + (g(x))^{n+2} = \frac{1}{2}U'(x).(U(x))^{\frac{n}{2}}$ où $U(x) = e^{2x} - 1$

b) Mque alors que $\forall n \in IN$, on a : $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+2}$

c) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in IN}$ est décroissante et déterminer sa limite.

2°) Pour tout $n \in IN^*$, on pose : $U_n = I_{n+4} - I_n$.

a) Montrer que $\sum_{k=0}^{n} U_{4k+1} = I_{4n+5} - I_1$

b) Vérifier que pour tout $n \in IN$,

$U_n = (I_{n+4} + I_{n+2}) - (I_{n+2} + I_n)$.

En déduire que $U_n = \frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+2}$.

c) Exprimer alors U_{4n+1} en fonction de n.

d) Calculer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de la somme $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ... + \frac{-1}{4n+3} + \frac{1}{4n+5}$

Exercice 12 : (6 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par
$f(x) = \sqrt{1 - e^{-x}}$.

I) 1) a) Etudier la dérivabilité de f a droite en 0.
b) Etudier les variations de f.
c) Tracer la courbe $\mathcal{C}$ de f.

2) a) Montrer que f admet une fonction réciproque g définie sur un intervalle J à préciser.
b) Expliciter g(x) pour tout x de J.
c) Prouver que l'équation g(x) = x admet une solution unique α sur] 0, 1[et que $\alpha \in]0.7, 0.8[$.
d)Tracer la courbe $\mathcal{C}'$ de g dans le même repère que f.

3) Calculer le volume V du solide de révolution engendré par la rotation de l'arc γ autour de l'axe des abscisses où

$\gamma = \{M(x,y) \text{ tels que } y = f(x) \text{ et } 0 \leq x \leq \alpha\}$.

II) Soit $n \in IN^*$, on considère la fonction F_n définie sur [0, 1 [par : $F_n(x) = \int_0^{g(x)} [f(t)]^n\,dt$ et $u_n = F_n(\alpha)$

1) a) M que pour tout n de IN* ; $0 \le u_n \le \alpha^{n+1}$
b) Calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$

2)Mque F_n est dérivable sur [0, 1[et que $F'_n(x) = \frac{2x^{n+1}}{1-x^2}$

3) a) Montrer que $F_{n+2}(x) - F_n(x) = \frac{-2x^{n+2}}{n+2}$
b) Déduire que $u_{n+2} = \frac{-2\alpha^{n+2}}{n+2} + u_n$.

c)M alors que pour tout n de IN*, $u_{2n} = \alpha - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha^{2k}}{2k}$

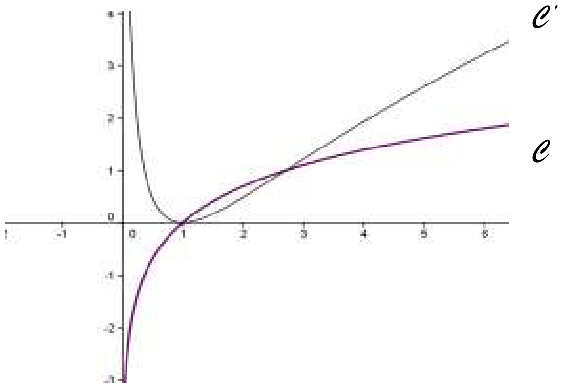
d) Calculer alors $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha^{2k}}{2k}$

Exercice 13 (6 points)

Les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ données dans le graphique ci contre représentent dans un repère orthonormé les fonctions f et g définies sur IR_+^* par :$f(x) = \ln x$ et $g(x) = \ln^2 x$

1) a) Calculer le volume V du solide de révolution engendré par la rotation de l'arc γ autour de l'axe des abscisses.
où $\gamma = \{M(x,y) \text{ tels que } y = f(x) \text{ et } 1 \le x \le e\}$.

b) Pour $x \in [1, e]$, on note M le point de la courbe $\mathcal{C}$ et N le point de la courbe $\mathcal{C}'$ de même abscisse x.
Déterminer la valeur de x pour laquelle la distance MN soit maximale.



2) Soit F la fonction définie sur IR_+ par
$\begin{cases} F(x) = \int_0^{g(x)} e^{-\sqrt{t}}\,dt, & si\ x > 0 \\ F(0) = 2 \end{cases}$

a) Montrer que F est dérivable sur]0, +∞[et que pour tout x > 0, $F'(x) = \frac{2\ln x}{x} e^{-|\ln x|}$

b) Déduire que pour tout $x \in$]0, 1], on a :
$F(x) = 2(x\ln x - x + 1)$.

c) Etudier la continuité et la dérivabilité de F à droite en 0.

3) a) Montrer que pour tout x > 0, $F(x) = F(\frac{1}{x})$

b) Expliciter F(x) , pour x ≥ 1

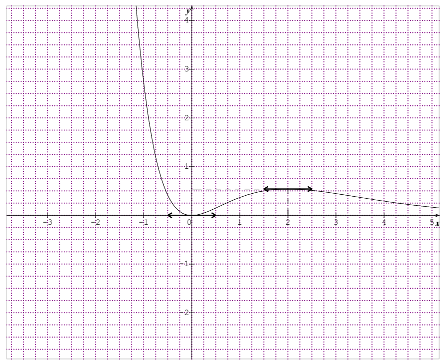
c) Dresser le tableau de variation de F puis construire sa courbe G dans un repère orthonormé.

Exercice 14(6,5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

A/ On considère les fonctions f et g définies sur IR par $f(x) = x e^{-x}$ et $g(x) = x^2 e^{-x}$.

La courbe $\mathcal{C}_g$ représentée ci dessous est la représentation graphique de g . On note $\mathcal{C}_f$ la courbe de f.



1)a- Dresser le tableau de variation de f.

b-Montrer que le point I(2, $2e^{-2}$) est un point d'inflexion de f.

c-Etudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

2)a- Vérifier que pour tout réel x on a :
$f(x) - x f'(x) = g(x)$.

b- Soit α un réel positif et T_α la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse α.
Montrer que T_α coupe $(O, \vec{j})$ au point $N(0, g(\alpha))$.

c-En déduire une construction de T_α. Tracer alors T_2 et $\mathcal{C}_f$.

d-Calculer en unité d'aires, l'aire de la partie du plan limitée par $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équations x = 0 et x =1.

B/ Soit n un entier naturel non nul, et h définie sur IR par $h(x) = (1 - x)e^{-x} - n$.

a- Dresser le tableau de variation de h.

b- Montrer que l'équation h(x) = 0 admet dans IR une solution unique α_n et que $-\ln n \le \alpha_n \le 0$.

a- Montrer que $\alpha_n = \ln(\frac{1-\alpha_n}{n})$.

b-Sachant que pour tout réel x strictement positif, on a $\ln x \le x - 1$, prouver que $h(-\ln\sqrt{n}) \le 0$.

c- Justifier que $\alpha_n \le -\frac{1}{2}\ln(n)$. Déduire $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha_n}{n}$

Exercice 15 :(5 points)

n est un entier naturel non nul.

On considère la fonction numérique f_n définie sur IR par : $f_n(x) = x + \frac{e^{-x}}{n}$

On désigne par $(\mathcal{C}_n)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) a/ Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)$

b/ Etudier la branche infinie au voisinage de $-\infty$.

c/ Montrer que la droite d'équation D : y = x est une asymptote à la courbe ($\mathscr{C}_n$) au voisinage de $+\infty$ et déterminer la position relative de la courbe ($\mathscr{C}_n$) et de la droite D.

2) a/ Donner le tableau de variations de la fonction f_n.

b/ Tracer la courbe $\mathscr{C}_3$.

3) a/ Montrer que si $n \geq 3$ alors $\frac{e}{n} < \ln(n)$

b/ Montrer que si $n \geq 3$ alors l'équation $f_n(x) = 0$ possède exactement deux solutions x_n et y_n tels que $x_n \leq -\ln(n)$ et $\frac{-e}{n} \leq y_n \leq 0$

c/ Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (y_n)$

4) Soit g la fonction définie sur IR+ par :

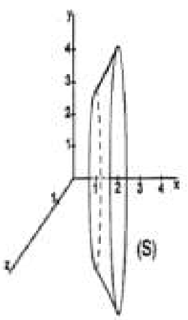
$$\begin{cases} g(x) = -1 - x\ln x \,; x > 0 \\ g(0) = -1 \end{cases}$$

a/ Montrer que la fonction g est continue à droite de 0.

b/ Vérifier que pour tout $n \geq 3$; $g\left(\frac{-1}{x_n}\right) = \frac{\ln(n)}{x_n}$

c/ En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{\ln(n)}{x_n}\right)$

Exercice 5 (4 points)



Dans la figure ci-contre, le solide de révolution (S) est obtenu en faisant tourner la portion de la courbe d'équation $y = e^{\sqrt{x}}$, $x \in [1, 2]$ autour de l'axe (Ox).

Le but de cet exercice est de calculer le volume $\mathcal{V}$ de ce solide.

1) Soit F la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $F(x) = \int_1^x e^{\sqrt{4t}}dt$.

Vérifier que $\mathcal{V} = \pi F(2)$.

2) Soit G la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $G(x) = \int_1^{\sqrt{4x}} te^t\,dt$.

a) Montrer que G est dérivable sur $[1, +\infty[$ et que $G'(x) = 2\,F'(x)$.

b) En déduire que pour tout réel x de $[1, +\infty[$, $2F(x) = G(x) - G(1)$.

3) a) Montrer que pour tout réel x de $[1, +\infty[$, $G(x) = \left(\sqrt{4x} - 1\right)e^{\sqrt{4x}}$.

b) Calculer alors $\mathcal{V}$.

<u>Exercice 17:(6 points)</u>

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$.

I/ 1) a/ Etudier les variations de f.

b/ Montrer que la courbe C de f admet une asymptote oblique d'équation : y = - x

2) a/ Montrer que f réalise une bijection de IR sur un intervalle J que l'on précisera.

b/ Tracer la courbe C de f et la courbe C' de f^{-1} dans un même repère orthonormé.

3) a/ Montrer que pour tout réel t positif on a ;

$t - \frac{t^2}{2} \leq \ln(1 + t) \leq t$.

b/ En déduire que pour tout réel x on a :

$e^{-x} - \frac{e^{-2x}}{2} \leq f(x) \leq e^{-x}$

II/ Soit u la suite définie sur IN* par :

$u_1 = 1 + \frac{1}{e}$ et pour tout n non nul, $u_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{e^{n+1}}\right) u_n$.

1) On pose v la suite définie par $v_n = \ln(u_n)$ pour tout n non nul.

a/ Mque pour tout n, non nul $v_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$.

b/ Montrer que la suite v est croissante.

2) On définit les suites (S_n) et (T_n) par :

$S_n = \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + \ldots + \frac{1}{e^n}$ et $T_n = \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^4} + \ldots + \frac{1}{e^{2n}}$.

a/ Déterminer les limites des suites S et T.

b/ Déduire de ce qui précède que pour tout entier n non nul on a : $S_n - \frac{1}{2}T_n \leq v_n \leq S_n$.

3) a/ Montrer que la suite (v_n) est convergente.

On note a sa limite.

b/ Prouver que $\frac{2e+1}{2(e^2-1)} \leq a \leq \frac{1}{e-1}$.

c/ Montrer que la suite u est convergente et donner un encadrement de sa limite.

<u>Exercice 18:(4 points)</u>

Soit F la fonction définie sur IR* par $F(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)}\,dt$.

1) Montrer que F est impaire.

2) Pour tout x > 0, on pose $g(x) = \int_1^x \frac{1}{\ln(1+t^2)}\,dt$.

a/ Vérifier que $F(x) = g(2x) - g(x)$; pour tout x > 0.

b/ Montrer que g est dérivable sur IR*+ puis calculer F'(x) pour tout x > 0.

c/ En Déduire le sens de variations de F sur $]0,+\infty[$.

3) a/ Montrer que pour tout x > 0, il existe un réel $c \in]x, 2x[$ tel que $F(x) = \frac{x}{\ln(1+c^2)}$.

b/ Déduire que, pour tout x > 0 ;
$\frac{x}{\ln(1+4x^2)} < F(x) < \frac{x}{\ln(1+x^2)}$.

c/ Déterminer les limites suivantes :

$\lim_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{x}$; $\lim_{x \to +\infty} F(x)$; $\lim_{x \to 0^+} F(x)$.

4) a/ Dresser le tableau de variations de F.

b/ Tracer l'allure de la courbe C de F dans un repère orthonormé.

(On donne $F(\sqrt{2}) \cong 0.7$)

Exercice 19 :(6 points)

A) Soit f la fonction définie sur IR par :
$f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$.

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$ du plan (unité graphique 4cm).

1) Etudier la parité de f.

2) a) Vérifier que pour tout $x \in$ IR on a :
$f'(x) = \frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$.

b) Dresser la tableau de variation de f puis tracer $\mathcal{C}_f$.

3) Calculer en cm² l'aire de la partie du plan limitée par $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équations :
$x = -\ln 2$; $x = \ln 2$ et $y = 0$.

B) Soit $n \in$ IN* et F_n la fonction définie sur $[0,+\infty[$. par : $F_n(x) = \int_0^x (f(t))^n dt$.

1) a) Montrer que pour tout $t \in [0,+\infty[$ on a :
$e^t \leq 1 + e^t \leq 2e^t$ puis déduire que :
$\frac{1}{4}e^{-t} \leq f(t) \leq e^{-t}$.

b) Montrer alors que pour tout n de IN* on a :
$\frac{1}{n4^n}[1-e^{-nx}] \leq F_n(x) \leq \frac{1}{n}[1-e^{-nx}]$.

c) En déduire que F_n admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$ que l'on notera u_n.

d) Prouver que $\forall n \in$ IN* : $\frac{1}{n4^n} \leq u_n \leq \frac{1}{n}$.

2) Calculer $F_1(x)$, pour $x \geq 0$.

3) a) Montrer que pour tout $t \in [0,+\infty[$ on a : $2f'(t)F_1(t) = 4f^2(t) - f(t)$.

b) En déduire que pour tout $n \in$ IN* :
$2f^{n-1}(t)f'(t)F_1(t) = 4f^{n+1}(t) - f^n(t)$.

4) a) Montrer que pour tout $n \in$ IN* et pour tout $x \geq 0$ on a :
$$n\int_0^x f^{n-1}(t)f'(t)F_1(t)dt = f^n(x)F_1(x) - \int_0^x f^{n+1}(t)\,dt.$$

b) Montrer alors que pour tout $x \geq 0$ et pour tout n de IN* on a :
$2f^n(x)F_1(x) = (4n+2)F_{n+1}(x) - nF_n(x)$.

c) En déduire que $\forall n \in$ IN* on a :
$(4n+2)u_{n+1} = nu_n$.

5) a) Montrer que $u_n = \frac{(n-1)!}{2^n.1.3.5\ldots(2n-1)}$.

b) Déterminer de ce qui précède $\lim_{n\to+\infty} \frac{(n-1)!(n!)}{(2n)!}$