MR: LATRACH
Lycée Pilote de L'Ariana

Fonctions Exponentielles

Toute personne croyant qu'une croissance exponentielle peut durer indéfiniment dans un monde fini est soit un fou, soit un économiste. ***Kenneth Ewart Boulding***

$4^{ème}$ Maths
2014/2015

Exercice 1 :

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2e^{x}+2}{e^{x}-3}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}(2e^{2x}-e^{x}+1)$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+1)e^{-x}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}2^{x\ln x}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-1}{x}e^{\frac{1}{x}}$

; $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{xe^{-x-1}+1}{x+1}$; $\lim\limits_{+\infty}e^{-x}\ln(1+e^{2x})$

$\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}\ln(1+e^{2x})$ $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{x}-x^{n})$,

Exercice 2 :

1°) Donner une primitive des fonctions suivantes :

$f(x)=x\,e^{x^2}$, $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{x}}$, $g(x)=\dfrac{e^{x}}{1+e^{-x}}$

$f(x)=e^{2x}\sqrt{1+e^{2x}}$; $f(x)=\sin x\,e^{\cos x}$.

2)Résoudre l'équation : $5\,\mathbf{e}^{4x}-13\,\mathbf{e}^{2x}-6=0$.

3)Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$f(x)=\frac{e^{x}+1}{e^{x}-1}$

1) Calculer la dérivée f'

2) En déduire le tableau de variation de f

Exercice :3

A)$\forall n\in IN^*$, on note $f_n(x)=\dfrac{x^n e^{-x}}{n\,!}$, C_n sa courbe

1)Etudier les variations de f_n sur IR+

2)$\forall n\geq2$, étudier la position relative de $\mathcal{C}_n$ et $\mathcal{C}_{n-1}$ et vérifier que le point $A_n(n,f_n(n))\in C_{n-1}$.

3)Construire C_1 et C_2.

B)Soit u la suite définie $\forall n\in IN^*$ par $u_n=f_n(n)$

a)En utilisant les résultats de la partie A, démontrer que u est décroissante.

b)La suite u est-elle convergente ?.

2)Soit $g(t)=\ln(1+t)-t+\dfrac{t^2}{4}$, $t\in[0,1]$

a)Etudier les variations de g et

montrer que $\forall t\in[0,1]$ on a : $\ln(1+t)\leq t-\dfrac{t^2}{4}$

b)En déduire que $\forall n\in IN^*$, on a $(1+\dfrac{1}{n})^n\leq e^{1-\frac{1}{4n}}$

3)Démontrer que $\forall n\in IN^*$, on a :$\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\leq e^{-\frac{1}{4n}}$

En déduire que $\forall n\geq2$, on a $u_n\leq e^{-1-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-2}+\ldots+\frac{1}{2}+1\right)}$

4)Démontrer que $\ln(n)\leq1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n-2}+\dfrac{1}{n-1}$

5)En déduire que $\forall n\geq2$, on a :$u_n\leq e^{-1-\frac{1}{4}\ln(n)}$

Quelle est la limite de u.

Exercice 4:

A)Soit $g(x)=(x-1)e^{x}+1$

1)Etudier les variations de g et construire sa courbe C dans un r.o.n

2)Etudier la position relative de C et de D :y=x

3)Calculer l'aire de la partie du plan comprise entre C et D

B/ Soit $a\in IR$, on pose $I(a)=\displaystyle\int_0^a\frac{(t-a)^2}{2}e^{t}dt$

1°) Mque $0\leq I(a)\leq e^{a}.\dfrac{a^3}{6}$, $a>0$;

en déduire $\lim\limits_{a\to0+}\dfrac{I(a)}{a^2}$

2°) Mque $0\leq|I(a)|\leq\dfrac{|a|^3}{6}$ si $a<0$;

déduire $\lim\limits_{a\to0-}\dfrac{I(a)}{a^2}$

3°) En calculant I(a) par une double intégration par partie montrer que : $e^{a}=1+a+\dfrac{a^2}{2}+I(a)$

C/ Soit h la fonction définie par : $\begin{cases}h(x)=\dfrac{-1+e^{2x}}{x}, & x>0\\ h(0)=2\end{cases}$

1)Mque h est continue et dérivable en 0.

2)Etudier les variations de h

3)Soit $F(x)=\displaystyle\int_1^{\ln x}h(t)dt$ l, $x\geq1$:

Mque F est dérivable sur $[1,\infty[$ et calculer F'(x)

5)a)Mque $\forall x>3$, on a $F(x)\geq\displaystyle\int_1^{\ln x}\frac{2t-1}{t}dt$

b)En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$

c)Dresser le tableau de variation de F, Calculer F(e) et déduire le signe de F

6)Montrer que $\forall x>1$: $F(x)=\displaystyle\int_e^x\frac{t^2-1}{t\ln t}dt$

7)a)Montrer que $\forall x\geq9$, $F(x)\geq\displaystyle\int_{\frac{x}{3}}^{x}\frac{t^2-1}{t\ln t}dt$

b)M qu'il existe $\alpha\in[\dfrac{x}{3},x]$ tel que $F(x)\geq\dfrac{2x}{3}\,\dfrac{\alpha^2-1}{\alpha\ln(\alpha)}$

c) Déterminer $\lim\limits_{x\to+}\dfrac{F(x)}{x}$ puis Construire la courbe β de F.

Exercice 5 : (6 points)

On a représenté ci-dessous la fonction g définie sur R \ { 0 } par : $g(t)=\frac{1}{t}e^{-t^2}$

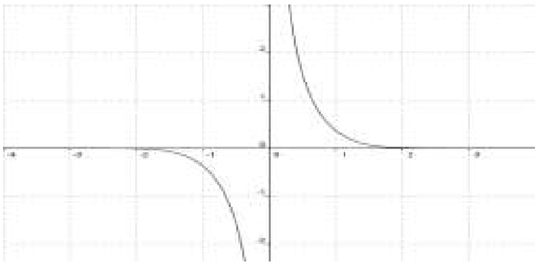
La vie n'est bonne qu'à étudier et à enseigner les mathématiques.

Toute personne croyant qu'une croissance exponentielle peut durer indéfiniment dans un monde fini est soit un fou, soit un économiste. Kenneth Ewart Boulding

On considère la fonction F définie sur R par :

$$\begin{cases} F(x) = \int_x^{2x} g(t)dt \ , \quad \text{si } x \neq 0 \\ F(0) = \ln(2) \end{cases}$$

1) Pour a > 0, interpréter F(a) et F(−a) en terme d'aires. En déduire que F est paire.



2) a) Montrer que F est dérivable sur]0, +∞[et que $F'(x) = \frac{e^{-4x^2}}{x}\left(1 - e^{3x^2}\right)$

b) En déduire le sens de variation de F sur]0, ∞[.

3) a) Montrer que pour tout réel x, $e^x \geq 1 + x$.

b) En déduire que, pour tout réel t > 0, $\frac{1}{t} - t \leq g(t) \leq \frac{1}{t}$

c) Prouver que, pour tout réel x > 0, $\ln(2) - \frac{3x^2}{2} \leq F(x) \leq \ln(2)$

d) Démontrer que F est continue et dérivable en zéro.

4) a) Montrer que, pour tout réel t ≥ 1 ; $e^{-t^2} \leq e^{-t}$

b) En déduire que pour tout réel x ≥ 1, $F(x) \leq \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}$

c) Déterminer la limite de F en +∞.

5) a) Dresser le tableau de variations de la fonction F sur R.

b) Tracer l'allure de la représentation graphique de F dans un repère orthonormé, unité graphique 4 cm.

(On donne F(0, 5) ≅ 0,4 et F(1) ≅ 0, 1)

Exercice 6

Dans tout le problème n un entier naturel non nul.

A)1)Soit $g_n(x) = n(x+1) + e^x$

a)Dresser le tableau de variation de g_n :

b)Mque l'équation $g_n(x)=0$ admet dans IR une unique solution α_n .

Prouver que $-2 < \alpha_n < -1$

d)En déduire le signe de $g_n(x)$ suivant les valeurs de x. 2)Soit $f_n(x) = \frac{x\,e^x}{n + e^x}$;

On désigne par C_n la courbe de f_n.

a)Mque $f'_n(x) = \frac{e^x g_n(x)}{(n + e^x)^2}$

b)Mque $\alpha_n + 1 = f_n(\alpha_n)$

c)Donner le tableau de variation de f_n

3)a)Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} (f_n(x) - x)$. Que peut-on conclure.

b)Etudier la position relative de C_n et de D :y=x

c)Etudier la position relative de C_{n+1} et C_n

d)Tracer C_1 et C_2

B)Soit $I = \int_{-1}^{0} x e^x dx$ et $U_n = \int_{-1}^{0} f_n(x)dx$

1)Calculer I

2)Mque pour tout x∈[-1, 0] ; $\frac{xe^x}{n} \leq \frac{xe^x}{n+e^x} \leq \frac{xe^x}{n+1}$

3)Mque la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite 4)Soit $V_n = \sum_{k=1}^{n} U_k$

a)Mque pour tout k >0, $\int_{k+1}^{k+2} \frac{1}{t}dt \leq \frac{1}{1+k}$

b)En déduire que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+k} \geq \ln(n+2) - \ln 2$

c)Montrer alors que $\lim\limits_{n \to +\infty} (V_n) = -\infty$.

Exercice 7:

A/ Soit f la fonction définie sur]0, +∞[par :

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{e^{2x} - 1}}$

1)a)Etudier les variations de f.

b)En déduire que pour tout x $\geq \ln\sqrt{2}$, :

$0 < f(x) \leq 1$

c)Tracer la courbe C de f.

2)On considère la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ par :

g (x) = - ln (cos x)

a)Montrer que g est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et calculer g'(x).

b)Montrer que g admet une fonction réciproque h définie sur IR+ .Calculer h ($\ln\sqrt{2}$).

c)Montrer que h est dérivable sur]0, +∞ [et que h' (x) = f (x).

B)Soit n ∈ IN* et F_n la fonction définie sur $[\ln\sqrt{2}, +\infty[$ par : $F_n(x) = \int_{\ln\sqrt{2}}^{x} [f(t)]^n dt$

1)a)Montrer que $F_1(x) = h(x) - \frac{\pi}{4}$.

b)Déduire l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C de f et les droites d'équations

y = 0, x = ln2 et x = $\ln\sqrt{2}$

c)Vérifier que $f^2(t) = \frac{e^{-2t}}{1 - e^{-2t}}$. En déduire $F_2(x)$.

2)a)Vérifier que pour tout t ≥ $\ln\sqrt{2}$, on a : $f(t) < 2e^{-t}$.

b)En déduire , en utilisant A- 1, que $F_n(x) \leq \sqrt{2}$.
c)Déduire que la fonction F_n admet une limite finie en $+\infty$.
3)a)Montrer que pour tout $t \geq \ln\sqrt{2}$, on a : $f(t) \geq e^{-t}$
b)En déduire que la limite de la fonction F_n en $+\infty$ est non nulle.

C)On pose $u_n = \lim\limits_{x \to +\infty} F_n(x)$
1)a)Calculer u_1 et u_2.
b)Montrer que la suite u est décroissante.
c)Déduire que la suite u est convergente.
2)a)Vérifier que $f^{n+2}(t) + f^{n}(t) = -f^{n-1}(t) \cdot f'(t)$
b)En déduire que $F_{n+2}(x)+F_n(x) = \frac{1}{n}[1 - f^{n}(x)]$
c)Montrer alors que $u_{n+2} + u_n = \frac{1}{n}$
d)Déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$
3)Soit v la suite définie sur IN par :
$v_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$
a)Montrer que $u_{2n+2} = \frac{(-1)^n}{2}(-v_n + \ln 2)$
b)En déduire la limite de la suite (v_n).

Exercice 8 :

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = x e^{-x}$.

A) 1) Etudier et représenter dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$ la fonction f
2) On désigne par A_n l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectifs x=1 et x= n.
Calculer An puis donner $\lim\limits_{n \to +\infty} A_n$.
2)Montrer que la restriction de f à [0, 1] réalise une bijection sur un intervalle J que l'on précisera. Soit C' la courbe de sa réciproque. Tracer C' dans le même repère.
Calculer l'aire du domaine limitée par les courbes C , C' et la droite $\Delta : y = -x+1+\frac{1}{e}$
1) Soit u la suite définie sur IN* par
$u_n = \frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} + \ldots + \frac{n}{e^n}$
et k un réel supérieur ou égal à 2
a) Montrer que la suite u est monotone.
b) Montrer que $\forall x \in [k,-1, k]$;
$f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \leq f(k-1)$
c) Prouver alors que :
$\frac{n}{e^n} + \int_{1}^{n} f(x)\,dx \leq u_n \leq \frac{1}{e} + \int_{1}^{n} f(x)\,dx$
d) En déduire que la suite u est convergente.

B)Soit F la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par
$F(x) = \int_{\ln x}^{2\ln x} f^2(t)\,dt$
1)a)Justifier l'existence de F(x) sur $[1, +\infty[$
b)Montrer que F est dérivable sur $[1, +\infty[$ et que
$F'(x) = \frac{(\ln(x))^2}{x^5}(8 - x^2)$
2) a)M que $\forall x \geq 1$ et $\forall t \in [\ln x, 2\ln x]$,
on a : $\frac{t^2}{x^4} \leq [f(t)]^2 \leq \frac{t^2}{x^2}$
b)Mque $\forall x \geq 1$; on a :
$\frac{7}{3}\frac{(\ln x)^3}{x^4} \leq F(x) \leq \frac{7(\ln x)^3}{3x^2}$
a) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} (F(x))$
3) Etudier les variations de F et donner l'allure de sa courbe Γ, on précisera la tangente à Γ au point d'abscisse 1.(On donne $F(2\sqrt{2}) \approx 0,11$)

Exercice 9:

Pour tout entier n, on considère la suite (u_n) définie par
$u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{e^x + 1}\,dx$
1)On pose $v_n = \int_0^1 e^{-nx}\,dx$
a)Calculer v_n
b) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$ puis $\lim\limits_{n \to +\infty} n v_n$.
2)a)Etablir que pour tout $x \in [0, 1]$, on a :
$2 \leq 1 + e^x \leq 2e^x$.
b) En déduire que pour tout n, on a :
$\frac{1}{2} v_{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{2} v_n$.
c)Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$. puis $\lim\limits_{n \to +\infty} n u_n$.
3) On pose $S_n = \sum\limits_{p=1}^{n} u_p$ et $W_n = \sum\limits_{p=1}^{n} v_p$; $n \geq 1$
a)Montrer que $0 \leq \sum\limits_{p=1}^{n} \frac{e^{-p}}{p} \leq \frac{1}{e-1}$
b) Montrer que pour tout entier naturel $p \geq 1$, on a : $\frac{1}{p+1} \leq \ln(p+1) - \ln(p) \leq \frac{1}{p}$
c)En déduire que pour tout $n \geq 2$, on a :
$\ln(n+1) \leq \sum\limits_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \leq 1 + \ln(n)$

d) Déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Exercice 10:

I – Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}} \text{ si } x>0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1)Montrer que f est dérivable en 0 à droite.

2)Montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{(1-x)e^{-\frac{1}{x}}}{x^3}$

3° Dresser le tableau de variations de f

4° Tracer la courbe C de f dans un repère orthonormé

II – Soit F la fonction ; $x > 1$; $F(x) = \displaystyle\int_1^{\frac{1}{\ln x}} f(t)\,dt$

1)a)Mque F est dérivable sur $]1,+\infty[$ et calculer $F'(x)$.

b) En déduire que $F(x) = \displaystyle\int_x^e \frac{1}{t^2\ln t}\,dt$

2° a) Montrer que pour tout réel $t > 1$, $\ln t < t-1$

b) En déduire $\forall\, x \in\,]1, e[$,

$F(x) \geq \dfrac{1}{e^2}\displaystyle\int_x^e \frac{1}{t-1}\,dt$

c) Calculer alors la limite de F en 1 à droite.

3° a) Montrer que pour tout $x > e$, $F(x) \geq -\dfrac{1}{e}$

b) En déduire que F admet en $+\infty$ une limite finie L

III – Soit φ la fonction définie par $\varphi(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\,dt$

1° Justifier l'existence de $\varphi(x)$ pour tout réel $x \geq 0$.

2° Vérifier que pour tout $x > 0$, $\varphi\left(\dfrac{1}{x}\right) = F(e^x)$

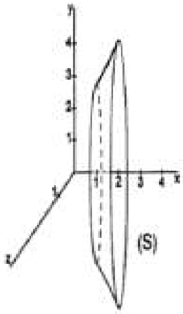
3° En déduire que $\varphi(0) = L$

4° Exprimer en fonction de L l'aire A du domaine limité par la courbe C de f et les droites $y = 0$, $x = 0$ et $x = 1$.

Exercice 5 (4 points)

Dans la figure ci-contre, le solide de révolution (S) est obtenu en faisant tourner la portion de la courbe d'équation $y = e^{\sqrt{x}}$, $x \in [1, 2]$ autour de l'axe (Ox).

Le but de cet exercice est de calculer le volume $\mathcal{V}$ de ce solide.



1) Soit F la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $F(x) = \displaystyle\int_1^x e^{\sqrt{4t}}\,dt$.

Vérifier que $\mathcal{V} = \pi F(2)$.

2) Soit G la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $G(x) = \displaystyle\int_1^{\sqrt{4x}} te^t\,dt$.

a) Montrer que G est dérivable sur $[1,+\infty[$ et que $G'(x) = 2F'(x)$.

b) En déduire que pour tout réel x de $[1,+\infty[$, $2F(x) = G(x) - G(1)$.

3) a) Montrer que pour tout réel x de $[1,+\infty[$, $G(x) = \left(\sqrt{4x}-1\right)e^{\sqrt{4x}}$.

b) Calculer alors $\mathcal{V}$.

Exercice 12

I°) 1°) Soit $g(x) = \sqrt{e^{2x}-1}$, $x > 0$

a) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{g(x)}{x} = +\infty$.

Interpréter graphiquement le résultat.

b)Dresser le tableau de variation de g.

2°) Soit G la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$G(x) = g(x) - \int_0^{g(x)}\frac{dt}{1+t^2}$$

a)Mque G est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que $G'(x) = g(x)$

b)Montrer alors que pour tout réel strictement positif x,

$$\int_0^x g(t)dt = g(x) - \int_0^{g(x)}\frac{dt}{1+t^2}$$

a) On admet que $\displaystyle\int_0^1\frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$.

b) Déduire que $\displaystyle\int_0^{\ln\sqrt{2}} g(t)dt = 1-\frac{\pi}{4}$

II°) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$I_n = \displaystyle\int_0^{\ln\sqrt{2}}(g(x))^n\,dx$ et $I_0 = \ln\sqrt{2}$

1°)a) Vérifier que pour tout entier naturel non nul n et pour tout réel positif x, on a:

$$(g(x))^n + (g(x))^{n+2} = \frac{1}{2}U'(x).(U(x))^{\frac{n}{2}} \text{ où } U(x) = e^{2x} - 1$$

b) Mque alors que $\forall$ n $\in$ IN, on a : $I_n + I_{n+2} = \dfrac{1}{n+2}$

c) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in IN}$ est décroissante et déterminer sa limite.

2°) Pour tout n $\in$ IN*, on pose : $U_n = I_{n+4} - I_n$.

a) Montrer que $\sum_{k=0}^{n} U_{4k+1} = I_{4n+5} - I_1$

b) Vérifier que pour tout n $\in$ IN,
$U_n = (I_{n+4} + I_{n+2}) - (I_{n+2} + I_n)$.
En déduire que $U_n = \dfrac{1}{n+4} - \dfrac{1}{n+2}$.

c) Exprimer alors U_{4n+1} en fonction de n.

d) Calculer la limite lorsque n tend vers +∞ de la somme $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ... + \frac{-1}{4n+3} + \frac{1}{4n+5}$

Exercice 13 : (6 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit f la fonction définie sur [0, + ∞[par
f(x) $= \sqrt{1 - e^{-x}}$.

I) 1) a) Etudier la dérivabilité de f a droite en 0.
b) Etudier les variations de f.
c) Tracer la courbe $\mathscr{C}$ de f.

2) a) Montrer que f admet une fonction réciproque g définie sur un intervalle J à préciser.
b) Expliciter g(x) pour tout x de J.
c) Prouver que l'équation g(x) = x admet une solution unique α sur] 0, 1[
et que $\alpha \in$]0.7, 0.8[.
d)Tracer la courbe $\mathscr{C}'$ de g dans le même repère que f.

3) Calculer le volume V du solide de révolution engendré par la rotation de l'arc γ autour de l'axe des abscisses où
$\gamma = \{M(x, y) \text{ tels que } y = f(x) \text{ et } 0 \le x \le \alpha\}$.

II) Soit n $\in$ IN*, on considère la fonction F_n définie sur [0, 1 [par : $F_n(x) = \int_0^{g(x)} [f(t)]^n\,dt$ et $u_n = F_n(\alpha)$

1) a) M que pour tout n de IN* ; $0 \le u_n \le \alpha^{n+1}$
b) Calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$

2)Mque F_n est dérivable sur [0, 1[et que
$F'_n(x) = \frac{2x^{n+1}}{1-x^2}$

3) a) Montrer que $F_{n+2}(x) - F_n(x) = \frac{-2x^{n+2}}{n+2}$
b) Déduire que $u_{n+2} = \frac{-2\alpha^{n+2}}{n+2} + u_n$.

c)M alors que pour tout n de IN*, $u_{2n} = \alpha - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha^{2k}}{2k}$

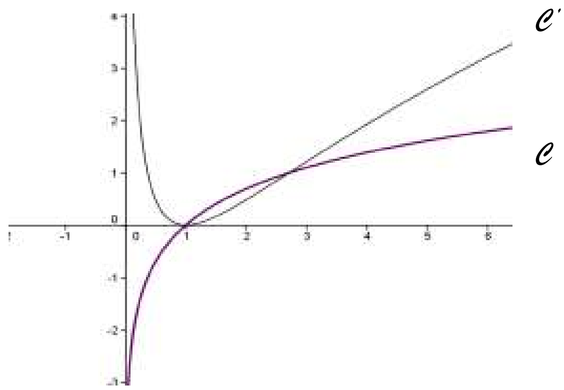
d) Calculer alors $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha^{2k}}{2k}$

Exercice 14 (6 points)

Les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ données dans le graphique ci contre représentent dans un repère orthonormé les fonctions f et g définies sur IR₊* par :f(x) = lnx et g(x) = ln²x

1) a) Calculer le volume V du solide de révolution engendré par la rotation de l'arc γ autour de l'axe des abscisses.
où $\gamma = \{M(x, y) \text{ tels que } y = f(x) \text{ et } 1 \le x \le e\}$.

b) Pour x ϵ [1, e], on note M le point de la courbe $\mathscr{C}$ et N le point de la courbe $\mathscr{C}'$ de même abscisse x.
Déterminer la valeur de x pour laquelle la distance MN soit maximale.



2) Soit F la fonction définie sur IR₊ par
$$\begin{cases} F(x) = \int_0^{g(x)} e^{-\sqrt{t}}dt, \ si\ x > 0 \\ F(0) = 2 \end{cases}$$

a) Montrer que F est dérivable sur]0, +∞[et que pour tout x > 0, $F'(x) = \frac{2lnx}{x} e^{-|lnx|}$

b) Déduire que pour tout x ϵ]0, 1], on a :
F(x) = 2(xlnx – x + 1).

c) Etudier la continuité et la dérivabilité de F à droite en 0.

3) a) Montrer que pour tout x > 0, $F(x) = F(\frac{1}{x})$

b) Expliciter F(x) , pour x ≥ 1

c) Dresser le tableau de variation de F puis construire sa courbe G dans un repère orthonormé.

Exercice 15:

Soit la fonction f définie sur IR par
$f(x)=e^{-2x}-2e^{-x}$.

1)Dresser le tableau de variation de f.

2)Soit g la restriction de f à $]-\infty;0]$

a)Montrer que g réalise une bijection de $]-\infty;0]$ sur un intervalle I que l'on précisera.

B)Montrer que pour tout x є I on a
$g^{-1}(x)=-\ln(1+\sqrt{1+x})$.

3)On donne ci-dessous la courbe représentative de C $^{-1}$ de g $^{-1}$ dans un repère orthonormé.

a)Tracer C la courbe représentative de f.

b)Calculer l'aire de la partie du plan limité par C et les droites x =- ln(2) ; x = 0 et y = 0.

c)En déduire la valeur de $\int_{-1}^{0}\ln(1+\sqrt{1+x})dx$.

4)Pour n є IN* on pose $U_n=n^2\int_{0}^{\frac{1}{n}}\ln(2-e^{-x^2})dx$.

a)Montrer que pour n є IN* on a
$0\le U_n\le n\ln(2-e^{-\frac{1}{n^2}})$; calculer $\lim\limits_{x\to0}\frac{l_n(2-e^{-x})}{x}$

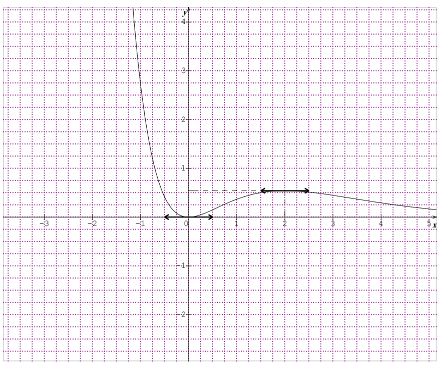
b)En déduire que (U_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 17(6,5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

A/ On considère les fonctions f et g définies sur IR par $f(x)=xe^{-x}$ et $g(x)=x^2e^{-x}$.

La courbe $\mathcal{C}_g$ représentée ci dessous est la représentation graphique de g . On note $\mathcal{C}_f$ la courbe de f.



1)a- Dresser le tableau de variation de f.

b-Montrer que le point I(2, $2e^{-2}$) est un point d'inflexion de f.

c-Etudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

2)a- Vérifier que pour tout réel x on a :
$f(x) - xf'(x) = g(x)$.

b- Soit α un réel positif et T_α la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse α.
Montrer que T_α coupe (O, $\vec{j}$) au point N (0, $g(\alpha)$).

c-En déduire une construction de T_α. Tracer alors T_2 et $\mathcal{C}_f$.

d-Calculer en unité d'aires, l'aire de la partie du plan limitée par $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équations x = 0 et x =1.

B/ Soit n un entier naturel non nul, et h définie sur IR par $h(x) = (1-x)e^{-x} - n$.

a- Dresser le tableau de variation de h.

b- Montrer que l'équation h(x) = 0 admet dans IR une solution unique α_n et que $-\ln n \le \alpha_n \le 0$.

a- Montrer que $\alpha_n = \ln\left(\frac{1-\alpha_n}{n}\right)$.

b-Sachant que pour tout réel x strictement positif, on a $\ln x \le x-1$, prouver que $h(-\ln\sqrt{n}) \le 0$.

c- Justifier que $\alpha_n \le -\frac{1}{2}\ln(n)$. Déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\alpha_n}{n}$

Exercice 18 :(5 points)

n est un entier naturel non nul.

On considère la fonction numérique f_n définie sur IR par : $f_n(x) = x + \frac{e^{-x}}{n}$

On désigne par ($\mathcal{C}_n$) sa courbe représentative dans un repère orthonormé ($O,\vec{i},\vec{j}$)

1) a/ Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)$

b/ Etudier la branche infinie au voisinage de $-\infty$.

c/ Montrer que la droite d'équation D : y = x est une asymptote à la courbe ($\mathcal{C}_n$) au voisinage de $+\infty$ et déterminer la position relative de la courbe ($\mathcal{C}_n$) et de la droite D.

2) a/ Donner le tableau de variations de la fonction f_n.

b/ Tracer la courbe $\mathcal{C}_3$.

3) a/ Montrer que si $n\ge3$ alors $\frac{e}{n} < \ln(n)$

b/ Montrer que si $n\ge3$ alors l'équation $f_n(x) = 0$ possède exactement deux solutions x_n et y_n tels que $x_n \le -\ln(n)$ et $\frac{-e}{n} \le y_n \le 0$

c/ Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(y_n)$

4) Soit g la fonction définie sur IR+ par :
$\begin{cases} g(x) = -1 - x\ln x \,;\, x>0 \\ g(0) = -1 \end{cases}$

a/ Montrer que la fonction g est continue à droite de 0.

b/ Vérifier que pour tout $n\ge3$; $g\left(\frac{-1}{x_n}\right) = \frac{\ln(n)}{x_n}$

c/ En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln(n)}{x_n}\right)$

Exercice 19:(4 points)

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$

par : $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = \frac{1}{x} - \frac{\ln(1+2x)}{2x^2}; \quad x > 0 \end{cases}$

1) Soit $x \geq 0$, montrer que pour tout $t \in [0, x]$ on a : $\frac{1}{1+2x} \leq \frac{1}{1+2t} \leq 1$

2) Soit $x > 0$

a/ Montrer que $f(x) = \frac{2}{x^2}\int_0^x \frac{t}{1+2t}dt$

b/ Montrer que $\frac{1}{1+2x} \leq f(x) \leq 1$ et en déduire que f est continue à droite de 0

3) Montrer que pour tout $x \geq 0$;
$\int_0^x \frac{2t}{1+2t}dt = \frac{x^2}{1+2x} + 2\int_0^x (\frac{t}{1+2t})^2 dt$

4) Soit $x > 0$

a/ Montrer que $f'(x) = \frac{-4}{x^3}\int_0^x (\frac{t}{1+2t})^2 dt$

b/ En utilisant 1) montrer que $\frac{-4}{3} \leq f'(x) \leq \frac{-4}{3(1+2x)^2}$

c/ Déduire que ; $\frac{-4x}{3} \leq f(x) - 1 \leq -\frac{4x}{3(1+2x)^2}$

d/ En déduire que f est dérivable à droite de 0 et préciser le nombre dérivé à droite de 0.

5) Construire la courbe C de f dans un repère orthonormé.

Exercice 20:(6 points)

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$.

I/ 1) a/ Etudier les variations de f.

b/ Montrer que la courbe C de f admet une asymptote oblique d'équation : $y = -x$

2) a/ Montrer que f réalise une bijection de IR sur un intervalle J que l'on précisera.

b/ Tracer la courbe C de f et la courbe C' de f^{-1} dans un même repère orthonormé.

3) a/ Montrer que pour tout réel t positif on a ;
$t - \frac{t^2}{2} \leq \ln(1 + t) \leq t$.

b/ En déduire que pour tout réel x on a :
$e^{-x} - \frac{e^{-2x}}{2} \leq f(x) \leq e^{-x}$

II/ Soit u la suite définie sur IN* par :

$u_1 = 1 + \frac{1}{e}$ et pour tout n non nul, $u_{n+1} = (1+ \frac{1}{e^{n+1}})\, u_n$.

1) On pose v la suite définie par $v_n = \ln(u_n)$ pour tout n non nul.

a/ Mque pour tout n, non nul $v_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$.

b/ Montrer que la suite v est croissante.

2) On définit les suites (S_n) et (T_n) par :

$S_n = \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + \ldots + \frac{1}{e^n}$ et $T_n = \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^4} + \ldots + \frac{1}{e^{2n}}$.

a/ Déterminer les limites des suites S et T.

b/ Déduire de ce qui précède que pour tout entier n non nul on a : $S_n - \frac{1}{2}T_n \leq v_n \leq S_n$.

3) a/ Montrer que la suite (v_n) est convergente.

On note a sa limite.

b/ Prouver que $\frac{2e+1}{2(e^2-1)} \leq a \leq \frac{1}{e-1}$.

c/ Montrer que la suite u est convergente et donner un encadrement de sa limite.

Exercice 21:(4 points)

Soit F la fonction définie sur IR* par $F(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)}dt$.

1) Montrer que F est impaire.

2) Pour tout $x > 0$, on pose $g(x) = \int_1^x \frac{1}{\ln(1+t^2)}dt$.

a/ Vérifier que $F(x) = g(2x) - g(x)$; pour tout $x > 0$.

b/ Montrer que g est dérivable sur IR*+ puis calculer F'(x) pour tout $x > 0$.

c/ En Déduire le sens de variations de F sur $]0, +\infty[$.

3) a/ Montrer que pour tout $x > 0$, il existe un réel $c \in]x, 2x[$ tel que $F(x) = \frac{x}{\ln(1+c^2)}$.

b/ Déduire que, pour tout $x > 0$;
$\frac{x}{\ln(1+4x^2)} < F(x) < \frac{x}{\ln(1+x^2)}$.

c/ Déterminer les limites suivantes :

$\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x}$; $\lim_{x\to+\infty} F(x)$; $\lim_{x\to 0^+} F(x)$.

4) a/ Dresser le tableau de variations de F.

b/ Tracer l'allure de la courbe C de F dans un repère orthonormé.

(On donne $F(\sqrt{2}) \cong 0.7$)