Exercice 1

A/ Simplifier chacune des expressions suivantes après avoir déterminer son domaine de définition

1) $e^{3\ln 5x}$ 2) $2\ln(e^{(x/2)}) - 2e^{\ln(x/2)}$

B/ Résoudre dans IR

1) $e^{2x} + e^{x} = 2$ 2) $e^{4x} - 3e^{2x} - 4 = 0$

3) $e^{2x+1} + e^{3x+1} = e^{x+1+\ln 6}$ 4) $e^{x^2} e^{x} < e^{6}$

5) $3^{x+4} - 9^{x} = 1458$

6) $2^{x} + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} = 3^{x} + 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3}$

C/ Etudier la dérivabilité de f et définir f '

1) $f(x) = e^{x^2} + x e^{x}$ 2) $f(x) = x^2 e^{x - x^2}$

3) $f(x) = e^{(-1/x^2)}$ 4) $f(x) = \dfrac{e^{x}}{1 - e^{x}}$

5) $f(x) = e^{\tan(x)}$ 6) $f(x) = 2^{x} + 2^{x+1}$

D/ Trouver une primitive de f sur un intervalle I à préciser

1) $f(x) = x e^{-x^2}$ 2) $f(x) = e^{3x-1}$

3) $f(x) = 3e^{x} + 2x - 1$ 4) $f(x) = \dfrac{e^{x}}{1 - e^{x}}$

5) $f(x) = \ln(e^{\tan(x)})$ 6) $f(x) = 3^{x} + 5^{x}$

7) $f(x) = \dfrac{1}{x}\ln x$ 8) $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$

E/ Etudier les limites éventuelles de f

1) $f(x) = x e^{-x}$ en $+\infty$ et en $-\infty$

2) $f(x) = \dfrac{e^{x} - 1}{2x}$ en 0 et en $+\infty$

3) $f(x) = e^{2x} - 3e^{x}$ en $+\infty$

4) $f(x) = x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$ en 0, en $+\infty$ et en $-\infty$

5) $f(x) = \dfrac{2x + e^{x}}{e^{x} - 1}$ en $+\infty$ et en $-\infty$

6) $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$ en $+\infty$ et en 0

7) $f(x) = x e^{3x}$ en $-\infty$

8) $f(x) = \dfrac{3^{2x}}{2^{3x}}$ en $+\infty$ et en $-\infty$

9) $f(x) = e^{-x}\ln(1 + e^{2x})$ en $\pm\infty$

10) $f(x) = x - \dfrac{1}{2}\ln|1 - 2e^{2x}|$ en $+\infty$

11) $f(x) = \dfrac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}$ en 0, en $\pm\infty$

Exercice 2

A/ Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{2e^{x} - 1}{e^{x} - 1}$

1) Etudier les variations de f
2) Montrer que $I\left(0 ; \dfrac{3}{2}\right)$ est un centre de symétrie de $\mathscr{C}$. Tracer $\mathscr{C}$
3) Déterminer le ou les point(s) de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à D : $6x + y = 0$

B/ Soit g la restriction de f à l'intervalle $]0, +\infty[$

1) Montrer que g réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera
2) Expliciter la fonction g^{-1} réciproque de g
3) Tracer la courbe Γ de g^{-1} dans le même repère que g
4) Soit P le point d'intersection des deux courbes. On note α son abscisse.
   Etudier les variations de la fonction
   $h(x) = xe^{x} - 2e^{x} - x + 1$.
   En déduire que : $2 < \alpha < 3$

Exercice 3

A/ Soit f la fonction définie par :

$f(x) = \dfrac{e^{x} - 1}{2e^{x} - 1}$ si $x \le 0$ et

$f(x) = \ln(1 + x)$ si $x > 0$

1) Etudier f : Continuité – Dérivabilité – Variations – Branches infinies
2) Tracer C_f
3) Déterminer l'intersection de C_f et la droite $y = -1$
4) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par C_f, (xx'), (yy') et ($y = -1$).

B /Soit g la fonction définie par :

$g(x) = x - \dfrac{1}{2}\ln|2e^{x} - 1|$

2) Déterminer le domaine de g
3) Etudier les variations de g
4) En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions 0 et β avec $-1 < \beta < -\ln 2$
5) Construire dans un autre repère, la courbe C_g
6) Soit h la restriction de g à l'intervalle $]-\infty, -\ln 2[$
   a) Montrer que h réalise une bijection de $]-\infty, -\ln 2[$ sur un intervalle J (déterminer J).
   b) Expliciter $h^{-1}(x)$, pour tout réel x de J

Exercice 0 : Pour chaque question une seule des trois propositions est exacte.
Cocher la bonne réponse :

1) Soit f la fonction définie sur I =]0 ; +∞ [par $f(x) = (2x-1)e^{\frac{1}{x}}$

La primitive de f sur I qui s'annule en 1 est la fonction F définie par :

a. $F(x) = x^2 e^{1-\frac{1}{x}}$

b. $F(x) = (x^2 - x)e^{\frac{1}{x}}$

c. $F(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}} - e$.

2) Soit f définie sur IR par $f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$.

a. f admet un maximum sur IR
b. f est minorée par 0
c. (C_f) admet un point d'inflexion.

Exercice 1

Soit f définie sur IR par $f(x) = (x+1)e^{-2x}$.

On note C la courbe de représentative de f dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 2cm)

A/ Etude de f et construction de C

1) Etudier les variations de f et dresser le tableau de variations de f

2) a) Déterminer les points d'intersection de C et les axes de coordonnées .

b) Démontrer que C admet un point d'inflexion I.

Vérifier que : $y = -x + 1$ est une équation de la tangente D à C en I

3) Construire C et D

B / Calcul d'aire et calcul de volume

Pour tout réel $\lambda \geq 0$, On note $A(\lambda)$ l'aire en cm² du domaine du plan formé par les points M(x , y) tels que :

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq \lambda \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

1) A l' aide d'une intégration par parties , calculer $A(\lambda)$

2) Calculer $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A(\lambda)$

3) Calculer alors l'aire en cm² du domaine du plan formé par les points M(x , y) tels que :

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ -x+1 \leq y \leq f(x) \\ y \geq 0 \end{cases}$$

2) On considère le solide S obtenu en pivotant la courbe de f autour de l'axe des abscisse et limité par les plans (x=0)et(x=1).
Calculer le volume de S

C/ Fonction réciproque

Soit g la restriction de f à l'intervalle $]-\infty, -\frac{1}{2}]$

1) Montrer que g réalise une bijection de $]-\infty, -\frac{1}{2}]$ sur un intervalle J à préciser .

2) Interpréter graphiquement l'équation g(x) = x et vérifier qu'elle admet une seule solution α

3) Etudier la dérivabilité de g^{-1} sur J

4) Construire dans le même repère la courbe représentative de g^{-1}

D : Etude d'une suite

Soit la suite u définie sur IN par : $u_n = \int_0^1 (x+1)e^{-2nx}\,dx$

1) Vérifier que $u_1 = \frac{1}{4}A(1)$

2) a) Montrer que pour tout $n \in IN$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$

b) Calculer alors la limite de u_n en +∞

Exercice 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. l'unité graphique est de 5cm.

Soit f la fonction définie sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ par $f(x) = e^{-x}\cos(x)$

A/ Etude de f

1) Etudier les variations de f .
2) Déterminer les tangentes à la courbe de f aux points d'abscisses $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$.
3) Construire C_f.
4) En intégrants par parties, Calculer en cm² l'aire du domaine limité par C_f , l'axe des abscisses et les droites $x = -\frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{\pi}{2}$.

B/

1) Existe-t-il des points d'intersection de C_f et la droite D : y = x ?
2) Soit g la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par $g(x) = f(x) - x$.
Etudier les variations de g
3) En déduire qu'il existe un unique réel α de $[0, \frac{\pi}{2}]$ tel que $e^{-\alpha}\cos(\alpha) = \alpha$ α .
4) Soit $\beta = f(1)$. montrer que $0 < \beta < \alpha < 1$.

C/Soit u la suite définie par

$u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = 1$

1) Montrer que : $\beta \le u_n \le 1$, pour tout entier naturel n

2) Soit $k = |f'(\beta)|$

a) Etudier le signe de la fonction dérivée seconde de f sur l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}]$

b) En déduire que $f'(0) < f'(x) \le f'(\frac{\pi}{2})$. Pour tout réel x de l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}]$

c) Déduire que $k < 1$

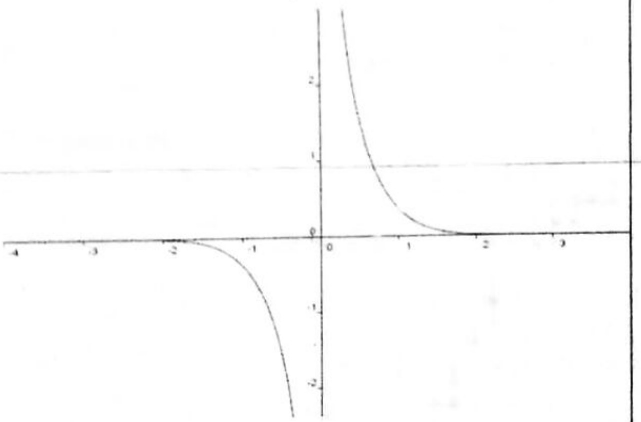
3) Montrer que pour tout entier naturel n : $|u_{n+1} - \alpha| \le k|u_n - \alpha|$

4) En déduire que $|u_n - \alpha| \le k^n|1 - \alpha|$ pour tout entier naturel n

5) En déduire que u est convergente vers α.

Exercice 3 :

On a représenté ci-dessous la fonction g définie sur R \ { 0 } par : $g(t) = \frac{1}{t}e^{-t^2}$



On considère la fonction F définie sur R par :

$$\begin{cases} F(x) = \int_x^{2x} g(t)dt\,, & \text{si } x \neq 0 \\ F(0) = \ln(2) \end{cases}$$

1) Pour a > 0, interpréter F(a) et F(−a) en terme d'aires. En déduire que F est paire.

2) a) Montrer que F est dérivable sur]0, +∞[et que $F'(x) = \frac{e^{-4x^2}}{x}\left(1 - e^{3x^2}\right)$

b) En déduire le sens de variation de F sur]0, ∞[.

3) a) Montrer que pour tout réel x, $e^x \ge 1 + x$.

b) En déduire que, pour tout réel t > 0, $\frac{1}{t} - t \le g(t) \le \frac{1}{t}$

c) Prouver que, pour tout réel x > 0, $\ln(2) - \frac{3x^2}{2} \le F(x) \le \ln(2)$

d) Démontrer que F est continue et dérivable en zéro.

4) a) Montrer que, pour to

$e^{-t^2} \le e^{-t}$

b) En déduire que pour tout réel x ≥ 1, $F(x) \le \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}$

c) Déterminer la limite de F en +∞.

5) a) Dresser le tableau de variations de la fonction F sur R.

b) Tracer l'allure de la représentation graphique de F dans un repère orthonormé, unité graphique 4 cm.

(On donne $F(0,5) \cong 0{,}4$ et $F(1) \cong 0{,}1$)

Exercice 4

Soit la fonction f définie sur IR par

$f(x) = x\ln(1+x)$ si $x \ge 0$ et $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ si $x < 0$.

(C) la courbe de f dans un repère orthonormé

1) a- Etudier la continuité et la dérivabilité de f.

b- Dresser le tableau de variation de f.

2) a) Montrer que $\Delta : y = x + 1$ est une asymptote à (C) au voisinage de −∞.

b) Etudier les variations de la fonction h définie sur IR par : $h(x) = e^x - x - 1$

c) Vérifier que pour tout $x < 0$. $f(x) - x - 1 = xh(\frac{1}{x})$ et en déduire la position de (C) par rapport à Δ sur]-∞, 0[.

3) a) Soit D : y = x. Déterminer (C) ∩ D et étudier la position de (C) par rapport à D.

b) Tracer Δ, D et (C).

4) a) Montrer que f réalise une bijection de IR sur IR et tracer dans le même repère la courbe (C') de f^{-1}.

b) Montrer que f^{-1} est dérivable sur IR* et calculer $(f^{-1})'(e-1)$.

c) Calculer l'aire A du domaine limité par :(C), D et les droites (x = 0) et (x = e − 1).

d) En déduire la valeur exacte de $\int_0^{e-1} f^{-1}(x)dx$

5) Soit (U_n) la suite définie sur IN par: $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = f(U_n)$ pour tout $n \in$ IN

a) Montrer que ∀ n ∈ IN ; $0 \le U_n \le 1$.

b) Montrer que (U_n) est décroissante.

c) … (U_n) est convergente et

Exercice 5:

Soit f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(t) = t\,e^{-t}$

1) a) Dresser le tableau de variations de f.
En déduire que f est bornée.
b) Montrer alors que pour tout réel $t \geq 0$, on :

$f(t)\,e^{\frac{t}{2}} \leq 1$

2) Pour tout entier $n \geq 1$, on note F_n la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par

$F_n(x) = \int_0^x [f(t)]^n\,dt$.

a) Prouver que $[f(t)]^n \leq e^{-\frac{t}{2}}$. On pourra utiliser la question 1).
b) En déduire que, $\forall x \geq 0$, $F_n(x) \leq 2$.
c) Prouver alors que $F_n(x)$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$.

3) Pour tout entier $n \geq 1$, on définie la fonction G_n sur $[0, +\infty[$ par $G_n(x) = \int_0^x t^n e^{-t}\,dt$.

a) Expliciter $G_1(x)$.
b) Montrer que
$G_{n+1}(x) = (n+1)\,G_n(x) - x^{n+1}e^{-x}$.
c) En déduire, en raisonnant par récurrence, que $\lim\limits_{x \to +\infty} G_n(x) = n!$.

4) a) Montrer que $(G_n)'(nx) = n^n [f(x)]^n$.
b) Prouver alors que $F_n(x) = \dfrac{1}{n^{n+1}}\,G_n(nx)$.
c) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} F_n(x)$.

Exercice 6:

Soit f définie sur $[1, +\infty[$ par : $f(x) = e^{-\sqrt{x-1}}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. a. Etudier la dérivabilité de f à droite en 1. Interpréter graphiquement le résultat.
b. Dresser le tableau de variation de f.
c. Tracer la courbe (C).

2. Soit F la fonction définie sur $]0, 1]$ par
$F(x) = \int_1^{1+(\ln x)^2} f(t)dt$.
a. Montrer que F est dérivable sur $]0, 1]$ et que $F'(x) = 2\ln x$.
b. Calculer F(x).

3. Pour tout $\alpha > 1$, on désigne par $S(\alpha)$ l'aire du domaine limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les
droites d'équations : $x = 1$ et $x = \alpha$.
a. Montrer que $S(\alpha) = F(f(\alpha))$.
b. Calculer $S(\alpha)$ et $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} S(\alpha)$

Exercice 7:

I – Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1) Montrer que f est dérivable à droite en 0.

2) Montrer que $\forall x > 0$, $f'(x) = \dfrac{(1-x)e^{-\frac{1}{x}}}{x^3}$

3) Dresser le tableau de variation de f.

4) Tracer la courbe C de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

II – Soit F définie sur $]1, +\infty[$, $F(x) = \int_1^{\frac{1}{\ln x}} f(t)dt$

1)a) Montrer que F est dérivable sur $]1, +\infty[$ et calculer $F'(x)$.

b) En déduire que $F(x) = \int_x^e \dfrac{1}{t^2 \ln t}\,dt$

2)a) Montrer que pour tout réel $t > 1$, $\ln t < t - 1$

b) En déduire que pour tout $x \in]1, e[$,

$F(x) \geq \dfrac{1}{e^2}\int_x^e \dfrac{1}{t-1}\,dt$

c) Calculer alors la limite de F à droite en 1.

3) a) Montrer que pour tout $x > e$, $F(x) \geq -\dfrac{1}{e}$

b) En déduire que F admet en $+\infty$ une limite finie L.

III – Soit φ la fonction définie par $\varphi(x) = \int_1^x f(t)dt$.

1) Justifier l'existence de $\varphi(x)$, pour tout $x \geq 0$.

2) Vérifier que pour tout $x > 0$, $\varphi\left(\dfrac{1}{x}\right) = F(e^x)$

3) En déduire que $\varphi(0) = L$

4) Exprimer en fonction de L l'aire A du domaine limité par la courbe C de f et les droites $y = 0$, $x = 0$ et $x = 1$.