Lycée pilote de Tunis	Fonctions exponentielles 1	Terminales Maths
Mr Ben Regaya. A	+ Eléments de corrections	www.ben-regaya.net

Exercice 1

n désigne un naturel non nul, soit φ_n la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $\varphi_n(x)=\dfrac{e^x-1}{x}+n\ln x$. On désigne par C_n la courbe représentative de φ_n dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Unité 2 *cm*.

1. a) Montrer que pour tout réel *x*, $1+(x-1)e^x\geq 0$.

   b) Etudier alors les variations de φ_n.

2. a) Etudier la position relative de C_n et C_{n+1}.

   b) Etudier la nature des branches infinies de C_n.

   c) On donne ci-dessous la courbe C_1. Construire C_2.

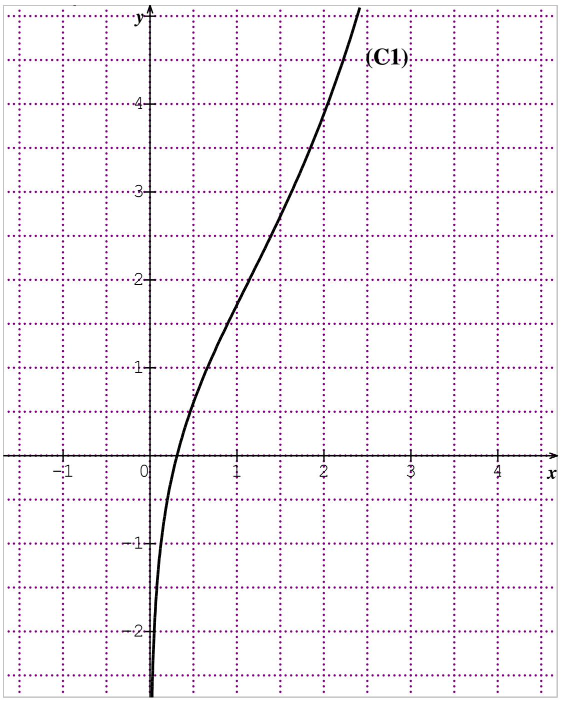
3. a) Pour tout naturel n non nul, montrer qu'il existe un unique réel $t_n\in]0,1[$ tel que $\varphi_n(t_n)=0$.

   b) Montrer que pour tout naturel n non nul, $\varphi_{n+1}(t_n)=\ln(t_n)$.

   c) En déduire la monotonie de la suite (t_n), puis sa convergence.

4. a) En utilisant la question 1. , montrer que si $x\in]0,1]$, $\dfrac{e^x-1}{x}\leq e$.

   b) En déduire que pour tout naturel n non nul, $\ln(t_n)\geq -\dfrac{e}{n}$ et conclure sur la limite de la suite (t_n).



Exercice 2

On considère la fonction *f*, définie sur $[1,+\infty[$ par $f(t)=\dfrac{e^t}{t}$. (C) la courbe représentant *f* dans un repère orthogonal.

موقع مراجعة باكالوريا
BAC.MOURAJAA.COM
bac Math

1. a) Justifier la continuité de f sur $[1,+\infty[$.

   b) Montrer que f est strictement croissante sur $[1,+\infty[$.

   c) Etudier f et tracer (C).

2. Pour tout réel x_0 de $[1,+\infty[$, on note $A(x_0)$ l'aire du domaine délimité par la courbe représentant f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=x_0$.

   a) Que vaut $A(1)$?

   b) Soit x_0 un réel quelconque de $[1,+\infty[$ et h un réel strictement positif. Justifier l'encadrement suivant :

$$f(x_0) \leq \frac{A(x_0+h)-A(x_0)}{h} \leq f(x_0+h).$$

   c) Lorsque $x_0 \geq 1$, quel encadrement peut-on obtenir pour $h \prec 0$ et tel que $x_0+h \geq 1$?

   d) En déduire la dérivabilité en x_0 de la fonction A ainsi que le nombre dérivé en x_0 de la fonction A.

   e) Conclure.

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=1+ln^2 x$. On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. Etudier les variations de f puis tracer (C).
2. a) Soit $a \in]0,1]$, calculer A_a l'aire de la partie du plan limitée par les droites $x=1,\ x=a,\ y=0$ et (C).

   b) Calculer $\lim\limits_{a\to 0} A_a$.

3. Soit g la restriction de f sur $]0,1]$.

   a) Montrer que g réalise une bijection de $]0,1]$ sur un intervalle J que l'on précisera. Tracer la courbe (C') de g^{-1} dans le même repère.

   b) Expliciter $g^{-1}(x)$ pour $x \in J$.

4. Soit $x \in]0,1]$, on note $I(x)=\int_0^1 (1-t)e^{tx}dt$, $J(x)=\int_0^1 (1-t)^2 e^{tx}dt$ et $h(x)=\dfrac{e^x-1-x}{x^2}$.

   a) Montrer que pour tout $x \in]0,1]$, $\dfrac{1}{3} \leq J(x) \leq \dfrac{e}{3}$. En déduire $\lim\limits_{x\to 0^+} xJ(x)$

   b) Montrer que pour tout $x \in]0,1]$, $xJ(x)=2I(x)-1$.

   c) Montrer que pour tout $x \in]0,1]$, $I(x)=h(x)$. En déduire $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)$.

5. Soit φ la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $\varphi(x)=-2\left(\sqrt{x-1}+1\right)e^{-\sqrt{x-1}}$.

   a) Montrer que pour tout réel $x \in]1,2]$, $\dfrac{\varphi(x)-\varphi(1)}{x-1}=2e^{-\sqrt{x-1}}h\left(\sqrt{x-1}\right)$.

   b) En déduire que φ est dérivable en 1 et calculer $\varphi'(1)$.

   c) Montrer que φ est dérivable sur $[1,+\infty[$ et calculer $\varphi'(x)$. Déduire la valeur de $\int_1^2 g^{-1}(x)\,dx$.

موقع مراجعة باكالوريا
BAC.MOURAJAA.COM
bac Math

Lycée pilote de Tunis	Fonctions exponentielles 1	Terminales Maths
Mr Ben Regaya. A	Eléments de corrections	www.ben-regaya.net

Exercice 1

1. a) $\varphi(x)=1+(x-1)e^x$ φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\varphi'(x)=e^x+(x-1)e^x=xe^x$ donc $\varphi'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$
$\varphi'(x)\succ 0 \Leftrightarrow x\succ 0$. φ' s'annule en 0 et change de signe en allant du $(-)$ vers le $(+)$ donc φ admet sur $\mathbb{R}$ un minimum absolu égal $\varphi(0)=1+(0-1)e^0=0$. Donc pour tout réel x, $\varphi(x)\geq 0$ ou encore pour tout réel x, $1+(x-1)e^x\geq 0$.

b) φ_n définie sur $]0,+\infty[$ par $\varphi_n(x)=\dfrac{e^x-1}{x}+n\,lnx$. φ_n dérivable sur $]0,+\infty[$ comme quotient et somme de fonctions dérivables et $\varphi_n'(x)=\dfrac{xe^x-(e^x-1)}{x^2}+\dfrac{n}{x}=\dfrac{xe^x-e^x+1}{x^2}+\dfrac{n}{x}=\dfrac{1+(x-1)e^x}{x^2}+\dfrac{n}{x}=\dfrac{\varphi(x)}{x^2}+\dfrac{n}{x}\succ 0$ puisque $\varphi(x)\succ 0$ sur $]0,+\infty[$ et que pour n naturel $\dfrac{n}{x}\succ 0$.

2. a) $\varphi_{n+1}(x)-\varphi_n(x)=\dfrac{e^x-1}{x}+(n+1)lnx-\left(\dfrac{e^x-1}{x}+n\,lnx\right)=lnx$ donc sur $]0,1[$, C_n est au dessus de C_{n+1}.
et sur $]1,+\infty[$ C_n est en dessous de C_{n+1}.

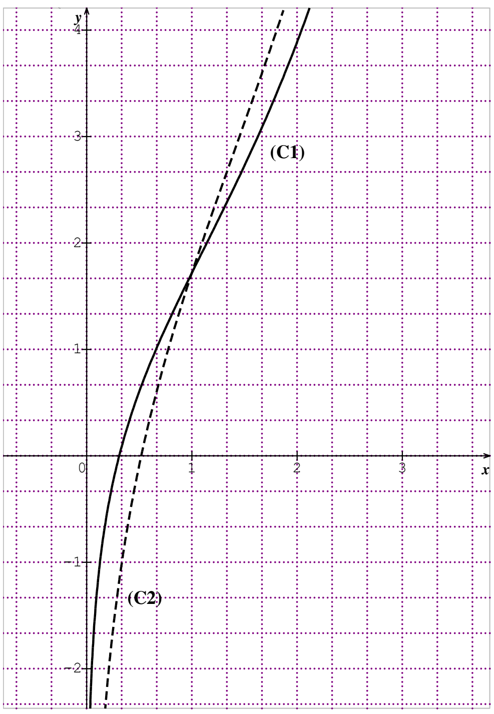
b) $\lim\limits_{x\to 0^+}\varphi_n(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x-1}{x}+n\,lnx=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x-1}{x}=0$ donc la droite $x=0$ est asymptote à C_n à droite en 0.

$\lim\limits_{x\to +\infty}\varphi_n(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x-1}{x}+n\,lnx=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x}{x}-\dfrac{1}{x}+n\,lnx=+\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\varphi_n(x)}{x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x}{x^2}-\dfrac{1}{x^2}+n\dfrac{lnx}{x}=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x}{x^2}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{lnx}{x}=0$.

Donc C_n admet au voisinage de $+\infty$ une branche infinie parabolique de direction $(O,\vec{j})$.

c)



موقع مراجعة باكالوريا
BAC.MOURAJAA.COM
bac Math

3. φ_n est continue et elle est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ donc elle réalise une bijection de cet intervalle sur son image $\varphi_n\langle]0,+\infty[\rangle =]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$. $0 \in \varphi_n\langle]0,+\infty[\rangle$ donc il existe un unique réel t_n tel que $\varphi_n(t_n)=0$.

$\varphi_n\langle]0,1[\rangle = \left]\lim\limits_{x\to 0^+}\varphi_n(x),\varphi_n(1)\right[=]-\infty, e-1[$ et comme $0 \in \varphi_n\langle]0,1[\rangle$ alors $t_n \in]0,1[$.

b) Montrons que pour tout naturel n non nul, $\varphi_{n+1}(t_n)=ln(t_n)$.

$\varphi_{n+1}(t_n)=\dfrac{e^{t_n}-1}{t_n}+(n+1)lnt_n=\dfrac{e^{t_n}-1}{t_n}+nln(t_n)+ln(t_n)=\varphi_n(t_n)+ln(t_n)=ln(t_n)$ car $\varphi_n(t_n)=0$.

c) On a $\varphi_{n+1}(t_n)=ln(t_n)$ et $t_n \in]0,1[$ donc $ln(t_n)\prec 0$ et par suite $\varphi_{n+1}(t_n)\prec 0$ et comme $\varphi_{n+1}(t_{n+1})=0$ alors on aura $\varphi_{n+1}(t_n)\prec\varphi_{n+1}(t_{n+1})$ et vu que φ_{n+1} est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ et que les termes de la suite (t_n) sont dans $]0,1[$ alors $t_n \prec t_{n+1}$. La suite (t_n) est alors croissante.

La suite (t_n) est alors croissante et elle est majorée par 1 donc elle converge.

4. a) On a pour tout réel x, $1+(x-1)e^x\geq 0 \Leftrightarrow 1+xe^x-e^x\geq 0\Leftrightarrow e^x-1\leq xe^x \Leftrightarrow \dfrac{e^x-1}{x}\leq e^x$, x étant strictement positif. Mais si $x \in]0,1]$, $e^x\leq e^1$ par croissance de la fonction exponentielle, on conclut alors que si $x\in]0,1]$, $\dfrac{e^x-1}{x}\leq e$.

$\varphi_{n+1}(t_n)=ln(t_n)\Leftrightarrow \dfrac{e^{t_n}-1}{t_n}+(n+1)lnt_n=ln(t_n)\Leftrightarrow\dfrac{e^{t_n}-1}{t_n}=-n\,ln(t_n)$ et comme $t_n\in]0,1[$ alors $\dfrac{e^{t_n}-1}{t_n}\leq e$ ce qui nous donne $-n\,ln(t_n)\leq e$ ou encore pour tout naturel n non nul, $ln(t_n)\geq -\dfrac{e}{n}$.

$t_n\in]0,1[$ donc $ln(t_n)\prec 0$ ce qui nous donne l'encadrement $-\dfrac{e}{n}\leq ln(t_n)\prec 0$ et comme $\lim\limits_{n\to+\infty}-\dfrac{e}{n}=0$ alors par comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty}t_n=0$.

Exercice 2

1. a) f est continue sur $[1,+\infty[$ comme quotient de fonctions continues.

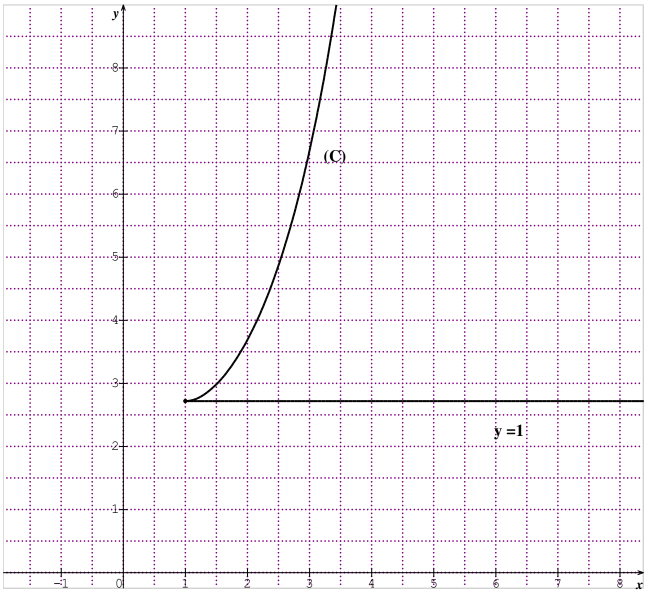
b) $f'(t)=\dfrac{e^t t-e^t}{t^2}=\dfrac{e^t(t-1)}{t^2}$; les réels e^t et t^2 sont évidemment positifs, $t-1$ l'est également lorsque $t\geq 1$.

Donc f est strictement croissante sur $[1,+\infty[$.

$\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{f(t)}{t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{e^t}{t^2}=+\infty$ résultat directe de cours . (C) admet au voisinage de $+\infty$ une branche infinie parabolique de direction $(O,\vec{j})$.

c)

موقع مراجعة باكالوريا
BAC.MOURAJAA.COM
bac Math



2. a) $A(1)$ vaut 0.

b) Sur $[1,+\infty[$ *f* est strictement croissante ainsi que *A*. La différence $A(x_0+h)-A(x_0)$ représente l'aire de la bande sous la courbe de *f*, comprise entre les droites $x=x_0$ et $x=x_0+h$: cette bande a une aire supérieure à celle du rectangle de hauteur $f(x_0)$ et de largeur *h*, et inférieure à celle du rectangle de hauteur $f(x_0+h)$ et de largeur *h*. On a donc

$$hf(x_0)\leq A(x_0+h)-A(x_0)\leq f(x_0+h)h$$

d'où l'encadrement demandé en divisant par *h* puisque *h* est positif.

c) Si on prend $h<0$, ça ne change pas grand-chose sur le fond, il y a surtout des questions de signes à respecter : la bande sous la courbe de *f* a pour aire $A(x_0)-A(x_0+h)$, le rectangle inférieur a pour aire $f(x_0+h)(-h)$ et le rectangle supérieur a pour aire $f(x_0)(-h)$; on a donc

$(-h)f(x_0+h)\leq A(x_0)-A(x_0+h)\leq(-h)f(x_0)\Leftrightarrow hf(x_0+h)\leq A(x_0+h)-A(x_0)\leq hf(x_0)$, soit

$$f(x_0+h)\geq\frac{A(x_0+h)-A(x_0)}{h}\geq f(x_0)$$

en divisant par *h* (attention au changement de sens des inégalités : *h* est négatif).

d) On a le même encadrement pour *h* positif ou négatif, on peut passer à la limite lorsque *h* tend vers 0, ce qui donne $f(x_0)\geq\lim\limits_{h\to0}\frac{A(x_0+h)-A(x_0)}{h}\geq f(x_0)\Rightarrow A'(x_0)=f(x_0)$ puisqu'on retrouve le nombre dérivé de *A* au milieu de l'encadrement.

e) Conclusion du cours : l'aire sous la courbe de *f* entre *x* =1 et $x=x_0$ est obtenue en trouvant une primitive de *f* (la fonction *A*) telle que *A*(1) = 0.

Exercice3

1. la fonction ln étant dérivable sur $]0,+\infty[$ il en est de même pour *f* et $f'(x)=2\frac{lnx}{x}$. Le signe de $f'(x)$ sur $]0,+\infty[$ est celui de lnx.

Ainsi $f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$, *f* est strictement croissante sur $[1,+\infty[$ et strictement décroissante ailleurs.

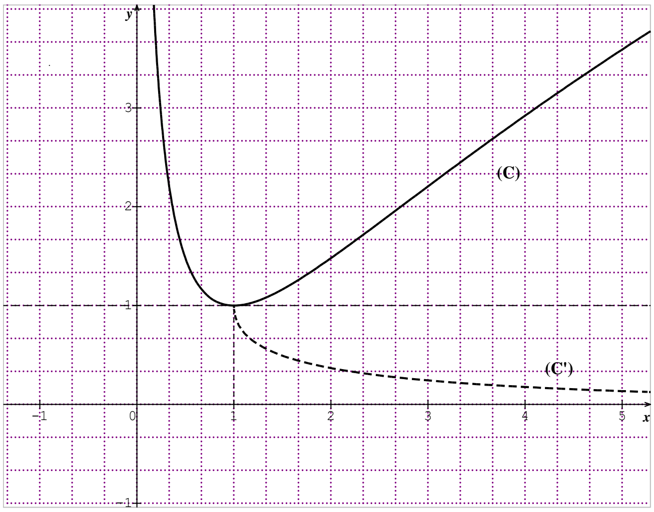
$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$ donc la droite des ordonnées est une asymptote à (C) a droite en 0.

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

Nature de la branche infinie au voisinage de $+\infty$.

موقع مراجعة باكالوريا
BAC.MOURAJAA.COM
bac Math

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} + \dfrac{ln^2 x}{x} = 0$ donc (C) admet une branche infinie parabolique de direction $(O, \vec{i})$.



2. a) Le minimum de *f* sur $]0, +\infty[$ est 1 donc *f* est toujours positive sur $]0, +\infty[$ donc

$$A_a = \int_a^1 f(x)\,dx = (1-a) + \int_a^1 ln^2(x)\,dx$$

Intégrons par parties $\int_a^1 ln^2(x)\,dx$

Posons $\begin{cases} u(x) = ln^2 x \\ v'(x) = 1 \end{cases}$ donc $\begin{cases} u'(x) = 2\dfrac{lnx}{x} \\ v(x) = x \end{cases}$.

Les fonctions étant continues sur $]0, +\infty[$ donc

$$\int_a^1 ln^2(x)\,dx = \left[x ln^2 x\right]_a^1 - 2\int_a^1 ln(x)\,dx = -a\,ln^2 a - \left[xlnx - x\right]_a^1 = -a\,ln^2 a + 1 + alna - a$$

Ainsi $A_a = (1-a) + \int_a^1 ln^2(x)\,dx = 2 - 2a - a\,ln^2 a + alna$

b) $\lim\limits_{a \to 0^+} A_a = \lim\limits_{a \to 0^+} 2 - 2a - a\,ln^2 a + alna = 2$.

3. a) g la restriction de *f* sur $]0,1]$. g est continue et elle est strictement décroissante sur $]0,1]$ donc elle réalise une bijection de cet intervalle sur son image $J = [1, +\infty[$. La réciproque de g existe et elle est définie sur $[1, +\infty[$.

La courbe (C') de g^{-1} est symétrique de (C) par-rapport à $\Delta : y = x$.

b) On a $x \in [1, +\infty[$ et $y \in]0,1]$

$g(y) = x \Leftrightarrow 1 + ln^2 y = x \Leftrightarrow ln^2 y = x - 1 \Leftrightarrow lny = \pm\sqrt{x-1}$ or $y \in]0,1]$ donc $lny \le 0$ et donc

$lny = -\sqrt{x-1} \Leftrightarrow y = e^{-\sqrt{x-1}}$. D'où pour $x \in J$, $g^{-1}(x) = e^{-\sqrt{x-1}}$.

4. a) On $x \in]0,1]$ et $t \in [0,1]$ donc $0 \le t\,x \le 1 \Leftrightarrow 1 \le e^{t\,x} \le e$ par croissance de la fonction exponentielle sur ℝ.

Pour *t* réel $(1-t)^2 \ge 0$ donc en multipliant la dernière inégalité devient : $(1-t)^2 \le e^{t\,x}(1-t)^2 \le e(1-t)^2$

la continuité des fonctions et la positivité de l'intégrale permettent :

موقع مراجعة باكالوريا
BAC.MOURAJAA.COM
bac Math

$$\int_0^1 (1-t)^2\,dt \le \int_0^1 e^{tx}(1-t)^2\,dt \le e\int_0^1 (1-t)^2\,dt \Leftrightarrow \int_0^1 (1-t)^2\,dt \le J(x) \le e\int_0^1 (1-t)^2\,dt$$

Or $\int_0^1 (1-t)^2\,dt = \left[-\frac{1}{3}(1-t)^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$. Ainsi $\frac{1}{3} \le J(x) \le \frac{e}{3}$. C'est le résultat demandé.

On a : $\frac{1}{3} \le J(x) \le \frac{e}{3}$ et pour $x \in]0,1]$, $\frac{1}{3}x \le xJ(x) \le \frac{e}{3}x$. Par le théorème de comparaison $\lim\limits_{x\to 0^+} xJ(x) = 0$.

b) $xJ(x) = \int_0^1 (1-t)^2\, xe^{tx}dt$

Intégrons par parties

$\begin{cases} u(t) = (1-t)^2 \\ v'(t) = xe^{tx} \end{cases}$ donc $\begin{cases} u'(t) = -2(1-t) \\ v(t) = e^{tx} \end{cases}$

les fonctions étant continues sur $\mathbb{R}$ donc $xJ(x) = \left[(1-t)^2 e^{tx}\right]_0^1 + 2\int_0^1 (1-t)e^{tx}dt$

$\Leftrightarrow xJ(x) = -1 + 2\int_0^1 (1-t)e^{tx}dt = -1 + 2I(x)$ c'est ce qu'on demande d'établir.

c) $I(x) = \int_0^1 (1-t)e^{tx}dt$.

Intégrons toujours par parties

$\begin{cases} u(t) = (1-t) \\ v'(t) = e^{tx} \end{cases}$ donc $\begin{cases} u'(t) = -1 \\ v(t) = \frac{1}{x}e^{tx} \end{cases}$

Les fonctions étant continues sur $\mathbb{R}$ donc

$$I(x) = \left[(1-t)\frac{1}{x}e^{tx}\right]_0^1 + \frac{1}{x}\int_0^1 e^{tx}dt = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\left[\frac{1}{x}e^{tx}\right]_0^1 = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\left(e^x - 1\right) = \frac{e^x - 1 - x}{x^2}.$$

Ainsi pour tout $x \in]0,1]$, $I(x) = h(x)$.

On a pour tout $x \in]0,1]$, $xJ(x) = 2I(x) - 1 \Leftrightarrow I(x) = \frac{1}{2}(xJ(x) + 1)$ et comme $\lim\limits_{x\to 0^+} xJ(x) = 0$ alors

$\lim\limits_{x\to 0^+} I(x) = \frac{1}{2}$ ce qui donne $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = \frac{1}{2}$.

5. a) $\frac{\varphi(x) - \varphi(1)}{x-1} = \frac{-2\left(\sqrt{x-1}+1\right)e^{-\sqrt{x-1}} + 2}{x-1} = 2\frac{-\left(\sqrt{x-1}\right)e^{-\sqrt{x-1}} - e^{-\sqrt{x-1}} + 1}{x-1}$

$= 2e^{-\sqrt{x-1}} \times \frac{-\left(\sqrt{x-1}\right) - 1 + e^{\sqrt{x-1}}}{x-1}$

Or $h\left(\sqrt{x-1}\right) = \frac{e^{\left(\sqrt{x-1}\right)} - 1 - \left(\sqrt{x-1}\right)}{\left(\sqrt{x-1}\right)^2} = \frac{e^{\left(\sqrt{x-1}\right)} - 1 - \left(\sqrt{x-1}\right)}{(x-1)}$

Ainsi $\frac{\varphi(x) - \varphi(1)}{x-1} = 2e^{-\sqrt{x-1}}h\left(\sqrt{x-1}\right)$.

b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\varphi(x) - \varphi(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} 2e^{-\sqrt{x-1}}h\left(\sqrt{x-1}\right) = 1$ car $\lim\limits_{x\to 1} 2e^{-\sqrt{x-1}} = 2\times 1 = 2$ et $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{x-1} = 0$ et

$\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = \frac{1}{2}$ donc par composée $\lim\limits_{x\to 1} h\left(\sqrt{x-1}\right) = \frac{1}{2}$.

موقع مراجعة باكالوريا
BAC.MOURAJAA.COM
bac Math

Donc φ est dérivable en 1 et $\varphi'(1)=1$.

c) La fonction $x \mapsto x-1$ est polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$ et strictement positive sur $]1,+\infty[$ donc la fonction $x \mapsto \sqrt{x-1}$ est dérivable sur cet intervalle comme la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ alors φ est dérivable sur $]1,+\infty[$ et comme elle est dérivable à droite en 1 alors φ est dérivable sur $[1,+\infty[$.

$$\varphi'(x)=-2\left(\frac{1}{2\sqrt{x-1}}e^{-\sqrt{x-1}}+\left(\sqrt{x-1}+1\right)\times\frac{-1}{2\sqrt{x-1}}e^{-\sqrt{x-1}}\right)$$

$$=-2\left(\frac{1}{2\sqrt{x-1}}e^{-\sqrt{x-1}}-\frac{1}{2}e^{-\sqrt{x-1}}-\frac{1}{2\sqrt{x-1}}e^{-\sqrt{x-1}}\right)=e^{-\sqrt{x-1}}$$

Ainsi pour tout réel x de $[1,+\infty[$ $\varphi'(x)=g^{-1}(x)$.

On vient de prouver que pour tout réel x de $[1,+\infty[$ $\varphi'(x)=g^{-1}(x)$ donc φ est une primitive sur $[1,+\infty[$ de g^{-1} et donc $\int_1^2 g^{-1}(x)\,dx=\varphi(2)-\varphi(1)$.

موقع مراجعة باكالوريا
BAC.MOURAJAA.COM
bac Math