Lycée pilote de Tunis	Fonctions exponentielles 2	Terminales maths
Mr Ben Regaya. A	+ éléments de corrections	www.ben-regaya.net

Exercice1

1. Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = \frac{1}{3}$ et de raison $\frac{1}{3}$.

   a) Ecrire u_n en fonction de n.

   b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

   c) Pour tout naturel n, on pose $s_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

   Exprimer s_n en fonction de n.

2. Vérifier que, pour tout réel $t \geq 0$; $e^t \geq 1$ en déduire que pour tout réel $x \geq 0$; $e^x \geq 1+x$.
3. Soit (v_n) la suite définie pour tout naturel n, par $v_n = (1+u_0)\times(1+u_1)\times\ldots\times(1+u_n)$

   a) Calculer v_0 et v_1

   b) Montrer que la suite (v_n) est croissante.

   c) Montrer que pour tout entier naturel n, $v_n \leq e^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)}$

   d) Montrer que la suite (v_n) est convergente vers un réel et que $\frac{4}{3} \leq l \leq \sqrt{e}$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x) = e^{-\sqrt{x}}$.

1. a) étudier la dérivabilité de f à droite en 0.

   b) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ puis étudier les variations de f et représenter sa courbe (C) dans un repère orthonormé.

2. Soit F définie sur $[0,+\infty[$ par : $F(x) = \int_0^{x^2} f(t)\,dt$.

   a) Montrer que F est dérivable sur $[0,+\infty[$ et calculer $F'(x)$.

   b) En déduire en intégrant que pour tout réel x de $[0,+\infty[$ on a : $F(x) = -2(x+1)e^{-x} + 2$.

   c) Calculer alors l'aire du domaine limité par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=1$ et $x=4$.

Exercice 3

1. Soit f la fonction définie par : $f(x) = 2e^{2x} - e^x$. (C) est la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité 4 cm).
   Etudier f et tracer (C).

2. a) Soit t un réel vérifiant $t \prec ln\left(\frac{1}{2}\right)$, calculer en cm^2 l'aire $A(t)$ du domaine plan défini par :

   $t \leq x \leq ln\left(\frac{1}{2}\right)$ *et* $f(x) \leq y \leq 0$.

   b) Déterminer $\lim\limits_{t\to-\infty} A(t)$.

3. Soit g la restriction de f à l'intervalle $I = \left[ln\left(\frac{1}{4}\right),+\infty\right[$.

   a) Montrer que g est une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera.

   b) Expliciter pour $x \in J$ le réel $g^{-1}(x)$.

c) Tracer la courbe de g^{-1}.

d) Déduire l'aire, en cm^2 du domaine définie par : $-\frac{1}{8} \leq x \leq 0$ et $ln\left(\frac{1}{4}\right) \leq y \leq g^{-1}(x)$.

4. Soit n un entier naturel et f_n la fonction définie par : $f_n(x) = \sum_{p=1}^{n} (-1)^p p\, e^{px}$.

   a) Donner une primitive F_n de f_n sur $\mathbb{R}$.

   b) Montrer que pour tout x réel ; $F_n(x) = \frac{(-1)^n e^{(n+1)x} - e^x}{1+e^x}$.

   En déduire que pour tout réel x on a : $f_n(x) = \frac{(-1)^n n\, e^{(n+2)x} + (-1)^n (n+1) e^{(n+1)x} - e^x}{(1+e^x)^2}$.

5. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum_{p=1}^{n} (-1)^p \frac{p}{n^p}$.

   a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on a : $u_n = \frac{(-1)^n \frac{n+2}{n^{n+1}} - \frac{1}{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}$.

   b) Calculer $\lim_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}}$, si $x \succ 0$ et $f(0) = 0$.

1. a) Montrer que f est dérivable à droite en 0.

   b) Montrer que pour tout réel $x \succ 0$, $f'(x) = \frac{(1-x)e^{-\frac{1}{x}}}{x^3}$.

   c) Dresser le tableau de variations de f.

   d) Tracer (C) courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

2. Soit F la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par : $F(x) = \int_1^{\frac{1}{lnx}} f(t)\, dt$.

   a) Montrer que F est dérivable sur $]1,+\infty[$ et calculer le réel $F'(x)$. En déduire que $F(x) = \int_x^e \frac{1}{t^2 lnt} dt$.

   b) Montrer que pour tout réel $t \succ 1$, $lnt \prec t-1$. En déduire que pour tout $x \in]1,e[$, $F(x) \geq \frac{1}{e^2} \int_x^e \frac{1}{t-1} dt$.

   Calculer alors la limite de F à droite en 1.

   c) Montrer que pour tout $x \succ e$, $F(x) \geq -\frac{1}{e}$. En déduire que F admet une limite finie l en $+\infty$.

3. Soit φ la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $\varphi(x) = \int_1^x f(t)\, dt$.

   a) Vérifier que pour tout réel $x \succ 0$, $\varphi\left(\frac{1}{x}\right) = F\left(e^x\right)$.

   b) En déduire que $\varphi(0) = l$.

   Exprimer en fonction de l l'aire du domaine limité par la courbe (C) et les droites $y = 0$, $x = 0$ et $x = 1$.

Exercice1

1. a) (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0=\frac{1}{3}$ et de raison $\frac{1}{3}$ donc $u_n=u_0\times q^n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$.

   b) La raison de la suite (u_n) est $\frac{1}{3}$ et $-1\prec\frac{1}{3}\prec 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

   c) s_n est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}\neq 1$ donc

   $s_n=\frac{1}{3}\times\dfrac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$.

2. on a : $t\geq 0\Leftrightarrow\ e^t\geq e^0=1$ par croissance de la fonction exponentielle.

   Déduction :

   on a pour tout réel $t\geq 0;\ e^t\geq 1$ la continuité de la fonction exponentielle et la positivité de l'intégrale permettent d'écrire : pour tout réel $x\geq 0;\ \int_0^x e^t dt\geq x\Leftrightarrow e^x-1\geq x\Leftrightarrow e^x\geq 1+x$.

3. On a : $v_n=(1+u_0)\times(1+u_1)\times\ldots\times(1+u_n)$

   a) $v_0=(1+u_0)=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$; $v_1=(1+u_0)\times(1+u_1)=\frac{4}{3}\times\left(1+\frac{1}{9}\right)=\frac{4}{3}\times\frac{10}{9}=\frac{40}{27}$.

   b) $v_{n+1}=(1+u_0)\times(1+u_1)\times\ldots\times(1+u_n)\times(1+u_{n+1})=v_n\times(1+u_{n+1})$ et comme $u_n\succ 0\Leftrightarrow 1+u_{n+1}\succ 1$ donc $\frac{v_{n+1}}{v_n}\succ 1$ et comme la suite (v_n) est à termes strictement positifs alors elle est croissante.

   c) on a pour tout $x\geq 0;\ e^x\geq 1+x$ donc pour k entier naturel k compris entre 0 et n : $1+u_k\leq e^{u_k}$ et donc

   $v_n\leq e^{u_0}\times e^{u_1}\times\ldots\times e^{u_n}$. Or $e^{u_0}\times e^{u_1}\times\ldots\times e^{u_n}=e^{(u_0+u_1+\ldots+u_n)}=e^{s_n}=e^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)}$.

   Ainsi : pour tout entier naturel n, $v_n\leq e^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)}$.

   d) le réel $1-\frac{1}{3^{n+1}}\leq 1\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)\leq\frac{1}{2}\Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)}\leq\sqrt{e}$.

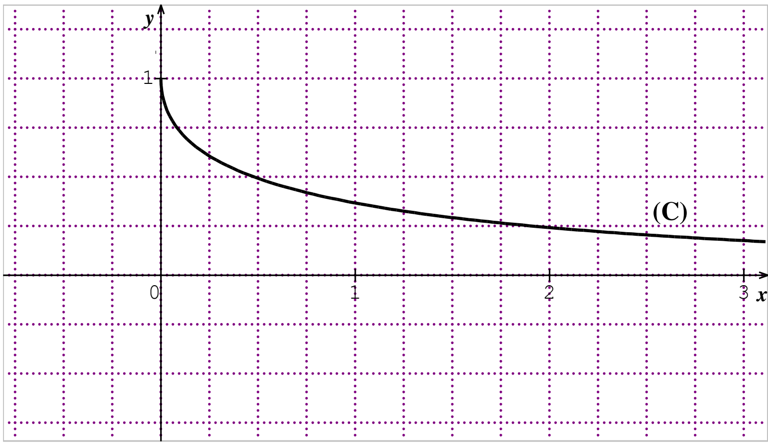
   La suite (v_n) est croissante et elle est majorée par $\sqrt{e}$ donc elle converge vers un réel l et on a :

   $v_0\leq v_n\leq\sqrt{e}\Leftrightarrow\frac{4}{3}\leq v_n\leq\sqrt{e}$ et donc $\frac{4}{3}\leq l\leq\sqrt{e}$.

Exercice2

1. a) Pour $x\succ 0$, $\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{e^{-\sqrt{x}}-1}{x}=\frac{e^{-\sqrt{x}}-1}{-\sqrt{x}}\times\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ et on a : $\lim\limits_{x\to0^+}-\sqrt{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$ donc par composée $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{e^{-\sqrt{x}}-1}{-\sqrt{x}}=1$ et par produit $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=-\infty$. f n'est pas dérivable à droite en 0.

b) La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc *f* est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $f^{'}(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}} \prec 0$. *f* est continue sur $[0,+\infty[$ et $f'(x) \prec 0$ sur $]0,+\infty[$ alors *f* est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$. $f\left\langle[0,+\infty[\right\rangle = \left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), f(0)\right] =]0,1]$.



2. a) La fonction $x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et elle est positive et *f* est continue sur $[0,+\infty[$ contenant le réel 0 donc F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc sur $[0,+\infty[$ et $F^{'}(x) = 2x \times e^{-\sqrt{x^2}} = 2x \times e^{-|x|} = 2xe^{-x}$ car $x \in [0,+\infty[$.

   b) On a pour tout réel $x \in [0,+\infty[$, $F^{'}(x) = 2xe^{-x}$ et $F(0) = \int_0^0 f(t)\,dt = 0$ donc F est la primitive sur $[0,+\infty[$ de la fonction qui a $x \mapsto 2xe^{-x}$ et donc $F(x) = 2\int_0^x t\,e^{-t}dt$.

   On intègre par parties, on posant :
   $\begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = e^{-t} \end{cases}$ donc $\begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = -e^{-t} \end{cases}$.

   Les quatre fonctions sont continues sur $\mathbb{R}$ par le théorème d'intégration par parties
   $\dfrac{1}{2}F(x) = \left[-t\,e^{-t}\right]_0^x + \int_0^x e^{-t}dt = -x\,e^{-x} + \left[-e^{-t}\right]_0^x = -x\,e^{-x} - e^{-x} + 1$. Ainsi
   $F(x) = 2\left(-x\,e^{-x} - e^{-x} + 1\right) = -2(x+1)e^{-x} + 2$. C'est le résultat souhaité.

   f étant continue et positive sur $[0,+\infty[$ donc l'aire demandé est

   $A = \int_1^4 f(t)\,dt = \int_1^0 f(t)\,dt + \int_0^4 f(t)\,dt = -\int_0^{1^2} f(t)\,dt + \int_0^{2^2} f(t)\,dt$. Donc $A = F(2) - F(1)$
   $= -6e^{-2} + 2 - \left(-4e^{-1} + 2\right) = 4e^{-1} - 6e^{-2}$

Exercice3

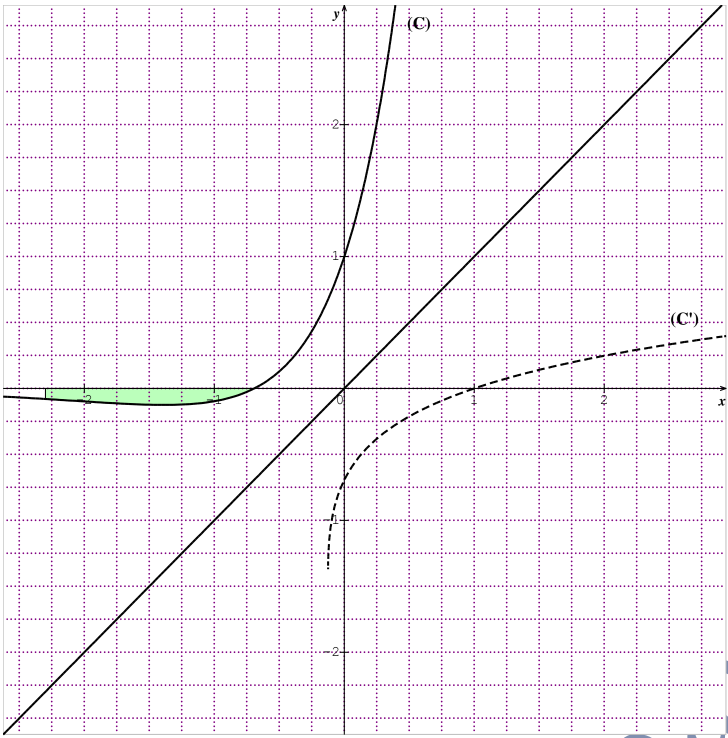
1. *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables et $f^{'}(x) = 4e^{2x} - e^{x} = e^{x}\left(4e^{x} - 1\right)$. Le signe de $f^{'}(x)$ et celui de $\left(4e^{x} - 1\right)$.

   Or $4e^{x} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^{x} \geq \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow x \geq ln\left(\dfrac{1}{4}\right)$.

   Ainsi *f* est strictement croissante sur $\left[ln\left(\dfrac{1}{4}\right), +\infty\right[$ et elle est strictement décroissante ailleurs.

   $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2e^{2x} - e^{x} = 0$ donc l'axe des abscisses est une asymptote a (C) au voisinage de $-\infty$

   $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}\left(2e^{x} - 1\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x}}{x}\left(2e^{x} - 1\right) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ donc (C) admet au voisinage de $+\infty$ une branche infinie parabolique de direction $\left(O,\vec{j}\right)$



2. a) On a $f(x)=0 \Leftrightarrow 2e^{2x}-e^{x}=0 \Leftrightarrow e^{x}\left(2e^{x}-1\right)=0 \Leftrightarrow 2e^{x}-1=0 \Leftrightarrow x=ln\left(\frac{1}{2}\right)$

sur $\left]-\infty,ln\left(\frac{1}{2}\right)\right]$, $f(x)\leq 0$

Or $\int_{t}^{ln\left(\frac{1}{2}\right)} f(x)dx=\left[e^{2x}-e^{x}\right]_{t}^{ln\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-\left(e^{2t}-e^{t}\right)=e^{t}-e^{2t}-\frac{1}{4}$.

Donc l'aire $A(t)=-\left(e^{t}-e^{2t}-\frac{1}{4}\right)16cm^{2}$.

b) $\lim\limits_{t\to-\infty} A(t)=\lim\limits_{t\to-\infty}\left(e^{2t}-e^{t}+\frac{1}{4}\right)16cm^{2}=4cm^{2}$

3. a) g est restriction de f à l'intervalle $I=\left[ln\left(\frac{1}{4}\right),+\infty\right[$. g est strictement croissante et elle est continue sur cet intervalle donc elle réalise une bijection de I sur $J=g\left\langle\left[ln\left(\frac{1}{4}\right),+\infty\right[\right\rangle=\left[-\frac{1}{8},+\infty\right[$.

b) On pour $y\in\left[ln\left(\frac{1}{4}\right),+\infty\right[$ et $x\in\left[-\frac{1}{8},+\infty\right[$: $g(y)=x \Leftrightarrow 2e^{2y}-e^{y}-x=0 \Leftrightarrow 2\left(e^{y}\right)^{2}-e^{y}-x=0$.

Si l'on pose $Y=e^{y}\geq\frac{1}{4}$

Alors on a : $2\left(Y\right)^{2}-Y-x=0$

le discriminant $\Delta=1+8x\geq 0$ et donc $Y_1=\frac{1-\sqrt{1+8x}}{4}$ et $Y_2=\frac{1+\sqrt{1+8x}}{4}$. Or Y_1 ne convient pas car on voit tout de suite que pour $x=0$ alors $Y_1=\frac{1-\sqrt{1}}{4}=0$ donc on conserve Y_2 et par suite

$$e^y=\frac{1+\sqrt{1+8x}}{4}\Leftrightarrow y=ln\left(\frac{1+\sqrt{1+8x}}{4}\right)$$ Finalement $g^{-1}(x)=ln\left(\frac{1+\sqrt{1+8x}}{4}\right)$.

d) Par des raisons de symétrie l'aire demandée est

$$A\left(ln\left(\frac{1}{4}\right)\right)\left(e^{2ln\left(\frac{1}{4}\right)}-e^{ln\left(\frac{1}{4}\right)}+\frac{1}{4}\right)16cm^2=\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)16cm^2=1cm^2.$$

4. a) $f_n(x)=\sum_{p=1}^{n}(-1)^p p\,e^{px}$ somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ donc f_n continue sur $\mathbb{R}$ elle admet par conséquent des primitives sur $\mathbb{R}$ l'une d'elles est $F_n(x)=\sum_{p=1}^{n}(-1)^p\,e^{px}$ on oublie la constante.

b) On a : $F_n(x)=\sum_{p=1}^{n}\left(-e^x\right)^p$ il s'agit de la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $-e^x\prec 0$ donc différent de 1. Ainsi

$$F_n(x)=\left(-e^x\right)\times\frac{1-\left(-e^x\right)^n}{1+e^x}=\left(-e^x\right)\times\frac{1-(-1)^n\left(e^x\right)^n}{1+e^x}=\frac{(-1)^n\,e^{(n+1)x}-e^x}{1+e^x}$$. C'est le résultat demandé.

Déduction

F_n étant une primitive de f_n sur $\mathbb{R}$ alors pour tout réel x, $F_n^{'}(x)=f_n(x)$ .Or

$$F_n^{'}(x)=\frac{\left((-1)^n(n+1)e^{(n+1)x}-e^x\right)\left(1+e^x\right)-e^x\left((-1)^n e^{(n+1)x}-e^x\right)}{\left(1+e^x\right)^2}$$

$$=\frac{(-1)^n(n+1)e^{(n+1)x}+(-1)^n(n+1)e^{(n+2)x}-e^x-e^{2x}-(-1)^n e^{(n+2)x}+e^{2x}}{\left(1+e^x\right)^2}$$

$$=\frac{(-1)^n(n+1)e^{(n+1)x}+(-1)^n ne^{(n+2)x}-e^x}{\left(1+e^x\right)^2}.$$

Ainsi pour tout réel x et pour tout entier naturel n, on a : $f_n(x)=\frac{(-1)^n n\,e^{(n+2)x}+(-1)^n(n+1)e^{(n+1)x}-e^x}{(1+e^x)^2}$.

5. a) Essayons de mieux voir $p\,e^{px}=\frac{p}{n^p}\Leftrightarrow e^{px}=\frac{1}{n^p}\Leftrightarrow px=ln\left(\frac{1}{n^p}\right)=-pln(n)\Leftrightarrow x=-ln(n)=ln\left(\frac{1}{n}\right)$.

Donc $u_n=f_n\left(ln\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.

On peut donc écrire $u_n=\frac{(-1)^n n\,e^{(n+2)ln\left(\frac{1}{n}\right)}+(-1)^n(n+1)e^{(n+1)ln\left(\frac{1}{n}\right)}-e^{ln\left(\frac{1}{n}\right)}}{\left(1+e^{ln\left(\frac{1}{n}\right)}\right)^2}$

$$\Leftrightarrow u_n=\frac{(-1)^n n\frac{1}{n^{n+2}}+(-1)^n(n+1)\frac{1}{n^{n+1}}-\frac{1}{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}\Leftrightarrow u_n=\frac{(-1)^n\frac{n+2}{n^{n+1}}-\frac{1}{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}$$

b) $\left|(-1)^n\frac{n+2}{n^{n+1}}\right|=\frac{n+2}{n^{n+1}}=\frac{n+2}{e^{(n+1)lnn}}=\frac{(n+1)lnn}{e^{(n+1)lnn}}\times\frac{n+2}{(n+1)lnn}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)lnn=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(n+1)lnn}{e^{(n+1)lnn}}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+2}{(n+1)lnn}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)}\times\frac{1}{lnn}=0$

donc par produit $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(n+1)lnn}{e^{(n+1)lnn}}\times\frac{n+2}{(n+1)lnn}=0$ donc par un théorème de comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^n\frac{n+2}{n^{n+1}}=0$

Finalement les opérations sur les limites permettent de conclure $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

Exercice4

1. a) $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}=\lim\limits_{t\to+\infty}te^{-t}=\lim\limits_{s\to-\infty}-se^s=0=f(0)$ donc f est continue à droite en 0.

Pour $x\succ0$; $\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}}{x}=\left(\frac{1}{x}\right)^2e^{-\frac{1}{x}}$

$\lim\limits_{x\to0^+}-\frac{1}{x}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2e^x=0$ donc par composée $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^2e^{-\frac{1}{x}}=0$.

f est dérivable à droite en 0 et $f_d'(0)=0$.

b) f est restriction à $]0,+\infty[$ d'une fonction dérivable en tout réel non nul donc f est dérivable sur cet intervalle et

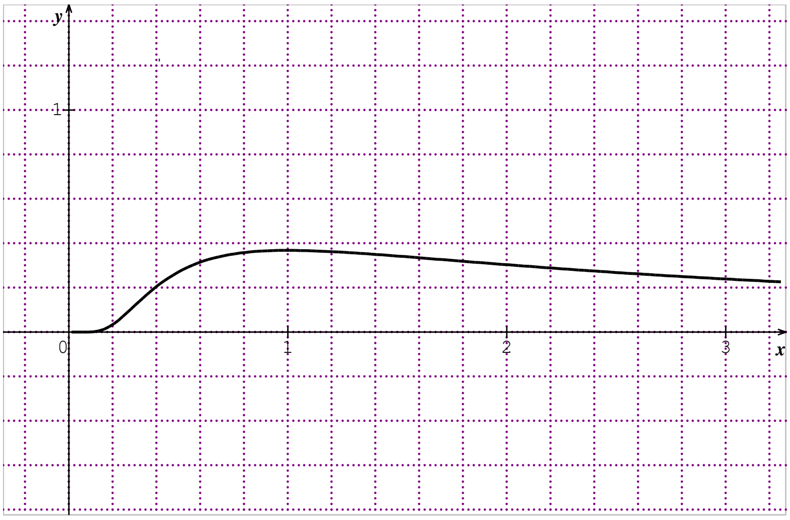
pour tout réel $x\succ0$, $f'(x)=-\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}+\frac{1}{x^2}\times\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}=\frac{1}{x^3}e^{-\frac{1}{x}}(1-x)$ c'est le résultat demandé.

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$

$f'(x)\succ0\Leftrightarrow x\in]0,1[$ et f est strictement croissante sur cet intervalle

$f'(x)\prec0\Leftrightarrow x\in]1,+\infty[$ et f est strictement décroissante sur cet intervalle.

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}=0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-\frac{1}{x}}=e^0=1$.



2. f est continue sur $[0,+\infty[$ puisqu'elle est continue sur l'ouvert $]0,+\infty[$ et à droite en 0 donc elle admet des primitives sur cet intervalle, soit H l'une des primitives de f sur $[0,+\infty[$.

On a d'une façon évidente $F(x)=H\left(\frac{1}{lnx}\right)-H(1)$ pour $x\in\,]1,+\infty[$.

La fonction : $u:x\mapsto\frac{1}{lnx}$ est dérivable sur $]1,+\infty[$ et $u'(x)=\frac{-1}{x(lnx)^2}\prec 0$ sur cet intervalle donc u est strictement décroissante sur $]1,+\infty[$ et $u\langle]1,+\infty[\rangle=]0,+\infty[$ et comme H est dérivable sur $[0,+\infty[$ alors F est dérivable sur $]1,+\infty[$ comme composée.

$$F'(x)=\frac{-1}{x(lnx)^2}\times H'\left(\frac{1}{lnx}\right)-0=\frac{-1}{x(lnx)^2}\times lnx\times e^{-lnx}=\frac{-1}{x(lnx)}\times e^{ln\left(\frac{1}{x}\right)}=\frac{-1}{x^2(lnx)}.$$

Or pour $x\in\,]1,+\infty[$, $\frac{1}{lnx}=1\Leftrightarrow lnx=1\Leftrightarrow x=e$.

Ainsi $F(e)=0$. F est alors la primitive de la fonction $x\mapsto\frac{-1}{x^2(lnx)}$ qui s'annule en e.

D'où $F(x)=\int_e^x-\frac{1}{t^2lnt}dt=\int_x^e\frac{1}{t^2lnt}dt$.

b) On a : $\forall x\succ 1,\ \frac{1}{x}\prec 1$ et donc pour tout réel $t\succ 1$, $\int_1^t\frac{1}{x}dx\prec t-1\Leftrightarrow lnt\prec t-1$.

On a : $x\le t\le e\Leftrightarrow x^2\le t^2\le e^2$ en multipliant par $lnt\succ 0$ car $t\succ 1$, on obtient : $t^2lnt\le e^2lnt$

or pour $t\succ 1$, $lnt\prec t-1\Rightarrow e^2lnt\le e^2(t-1)$ et donc $t^2lnt\le e^2(t-1)$

et les deux membres de cette inégalité sont strictement positifs, on obtient donc : $\frac{1}{e^2(t-1)}\le\frac{1}{t^2lnt}$.

On a pour $t\succ 1$, $\frac{1}{e^2(t-1)}\le\frac{1}{t^2lnt}$ et les deux fonctions sont continues sur $]1,+\infty[$ donc d'après la positivité de l'intégrale $\forall x\in\,]1,e[$, $\int_x^e\frac{1}{e^2(t-1)}dt\le\int_x^e\frac{1}{t^2lnt}dt\Leftrightarrow F(x)\ge\frac{1}{e^2}\int_x^e\frac{1}{t-1}dt$ pour tout $x\in\,]1,e[$.

Or $\int_x^e \frac{1}{t-1}dt = \left[ln(t-1)\right]_x^e = ln(e-1) - ln(x-1)$ et donc pour $x \in]1, e[$, $F(x) \geq \frac{1}{e^2}\left(ln(e-1) - ln(x-1)\right)$.

$\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{1}{e^2}\left(ln(e-1) - ln(x-1)\right) = +\infty$ donc par comparaison $\lim\limits_{x \to 1^+} F(x) = +\infty$.

c) $e \leq t \leq x \Leftrightarrow lne \leq lnt \leq lnx$ par croissance de la fonction ln.

$\Leftrightarrow 1 \leq lnt \leq lnx \Leftrightarrow t^2 \leq t^2 lnt \leq t^2 lnx$ avec $t \succ 1 \Rightarrow t^2 \succ 1 \succ 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{t^2 lnx} \leq \frac{1}{t^2 lnt} \leq \frac{1}{t^2}$. Ainsi pour $e \leq t \leq x$, on a $\frac{1}{t^2 lnt} \leq \frac{1}{t^2}$ et les fonctions sont continues sur $]1, +\infty[$ donc

par la positivité de l'intégrale, on a : pour $x \succ e$, $\int_e^x \frac{1}{t^2 lnt}dt \leq \int_e^x \frac{1}{t^2}dt \Leftrightarrow -F(x) \leq \left[-\frac{1}{t}\right]_e^x = \frac{1}{e} - \frac{1}{x} \leq \frac{1}{e}$.

On en déduit donc que pour tout $x \succ e$, $F(x) \geq -\frac{1}{e}$.

On a vu que F est dérivable sur $]1, +\infty[$ et que $F'(x) = \frac{-1}{x^2(lnx)} \prec 0$. ($lnx \succ 0$ pour $x \in]1, +\infty[$).

F est alors strictement décroissante sur $]e, +\infty[$ et elle est minorée par $-\frac{1}{e}$ donc elle admet une limite finie l en $+\infty$.

3. a) F est définie sur $]1, +\infty[$ par : $F(x) = \int_1^{\frac{1}{lnx}} f(t)dt$.

Pour $x \in]0, +\infty[$, $e^x \succ 1$ et donc $F(e^x) = \int_1^{\frac{1}{ln(e^x)}} f(t)dt = \int_1^{\frac{1}{x}} f(t)dt = \varphi\left(\frac{1}{x}\right)$.

f est continue sur $[0, +\infty[$ donc φ est dérivable sur $[0, +\infty[$ et par suite elle est continue sur cet intervalle donc en zéro.

D'une part : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \varphi(x) = \varphi(0)$ donc par composée $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \varphi(0)$

d'autre part $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = l$ donc par composée $\lim\limits_{x \to +\infty} F(e^x) = l$

et comme pour tout réel $x \succ 0$, $\varphi\left(\frac{1}{x}\right) = F(e^x)$ alors l'égalité des limites donne $\varphi(0) = l$.

Pour $x \in [0,1]$, $f(x) \geq 0$ donc l'aire demandée en unité d'aire est :

$$A = \int_0^1 f(x)dx = -\int_1^0 f(x)dx = -\varphi(0) = -l.$$