Lycée Pilote Sfax A/S : 2020-2021	**Série N°34** (Fonction exponentielle)	$4^{\text{ème}}$ Math Mr Jellali

Exercice 1

A/ Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = \dfrac{e^{\frac{-1}{x}}}{x} & \text{si } x \in]0, +\infty[\\ f(0) = 0 \end{cases}$

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. a. Montrer que f est continue à droite en 0.
   b. Montrer que f est dérivable à droite en 0. Interpréter le résultat graphiquement.
2. Dresser le tableau de variation de f et tracer C_f .

B/ Soit F la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par $F(x) = \int_x^e \frac{1}{t^2 \ln(t)} dt$.

1. Montrer que F est dérivable sur $]1, +\infty[$ et calculer $F'(x)$.
2. a. Montrer que pour tout $t \in [1, +\infty[$, $\ln(t) \le t - 1$. Montrer que pour tout $x \in]1, e[$, $F(x) \ge \frac{1}{e^2} \int_x^e \frac{1}{t-1} dt$.
   b. Déterminer alors la limite de F à droite en 1.
3. a. Montrer que pour tout $x \in]e, +\infty[$, $F(x) \ge \frac{-1}{e}$.
   b. En déduire que F admet en $+\infty$ une limite finie L et que $\frac{-1}{e} \le L \le 0$.
4. Tracer une allure de la courbe de F dans un repère $(O', \vec{u}, \vec{v})$. (On prendra $L \simeq -0{,}15$)

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = e^{\sqrt[3]{x}}$.

On désigne par C_f la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 .
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Dans l'annexe (II) on a représenté les courbes Γ_1 et Γ_2 d'équations respectives $y = e^x$ et $y = \ln x$.
   a. Déterminer les points d'intersection de C_f et Γ_1.
   b. Montrer que C_f est au dessus de Γ_1.
   c. Construire la demi-tangente à C_f au point d'abscisse 1.
   d. Construire C_f .
4. On se propose de déterminer l'aire de la partie du plan limitée par C_f et Γ_1.
   a. Montrer que f réalise une bijection de $[0, 1]$ sur un intervalle J à préciser.
   b. Tracer C' la courbe de la fonction réciproque de f.
   c. Montrer que $f^{-1}(x) = \ln^3(x)$ pour tout $x \in J$.
   d. Calculer $\int_1^e \ln^3(x) dx$.
   e. Conclure.