Exercice 1

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

On désigne par f_n la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f_n(x) = \frac{x}{n} - e^{-nx}$.

1. Dresser le tableau de variation de f_n.
2. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet dans $[0, +\infty[$ une seule solution a_n.
3. Montrer que pour tout réel x de $[0, +\infty[$, $e^x \geq x + 1$.
4. Montrer que $\frac{1}{n} < a_n < 1$.
5. a. Montrer que $f_{n+1}(a_n) = \frac{e^{-(n+1)a_n}}{n+1}\left[n\left(e^{a_n} - 1\right) - 1\right]$.

   b. En déduire que $f_{n+1}(a_n) > 0$.

   c. Montrer alors que la suite (a_n) est décroissante et par suite qu'elle est convergente.
6. Vérifier que $a_n = \frac{\ln(n)}{n} - \frac{\ln(a_n)}{n}$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + e^{-|x|}$.

On désigne par C_f la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. a. Etudier la dérivabilité de f en 0.

   b. Dresser le tableau de variation de f.

   c. Montrer que la droite $D : y = x$ est une asymptote à C_f.

   d. Tracer C_f.
2. Soit $k \in]0, 1[$. On désigne par Δ_k la droite d'équation $y = x + k$.

   a. Montrer que Δ_k coupe C_f en deux points M_k et N_k d'abscisses respectives $\ln k$ et $-\ln k$.

   b. On désigne par P_k la partie du plan comprise entre C_f et Δ_k.

   Montrer que l'axe des ordonnées partage P_k en deux parties de même aire.

   c. Soit $\mathcal{A}_k$ l'aire de la partie P_k. Calculer $\mathcal{A}_k$ puis déterminer $\lim\limits_{k \to 0^+} \mathcal{A}_k$.
3. On note B le point de C_f d'abscisse 0. On désigne par S_k l'aire du triangle BM_kN_k.

   a. Montrer que $S_k = (k-1)\ln k$.

   b. Montrer que $S_k = 2\mathcal{A}_k$, si et seulement si, $\frac{4(k-1)}{3k+1} - \ln k = 0$.

   c. En déduire qu'il existe une seule valeur de $k \in]0, 1[$ telle que $S_k = 2\mathcal{A}_k$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$.

On désigne par C_f la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Etudier la continuité de f en 0.
2. Etudier la dérivabilité de f à gauche en 0. Interpréter le résultat graphiquement.
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. L'annexe (I) représente la courbe C_g de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$.

   a. Etudier la position relative de C_f et C_g.

   b. Tracer, dans l'annexe, la courbe C_f.
5. Soit α et β deux réels tels que $\alpha<\beta<-1$.

   On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par C_f, l'axe des abscisses et les droites $x=\alpha$ et $x=\beta$.

   a. Calculer $\mathcal{A}$.

   b. Construire, sur l'annexe, un rectangle dont l'aire est égale à $\mathcal{A}$.