Lycée Pilote Sfax A/S : 2020-2021	**Série N°36** (Fonction exponentielle)	$4^{\text{ème}}$ Math Mr Jellali

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{e^{2x}}{1+e^{x}}$.

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

A) 1) Dresser le tableau de variation de f.

2)a) Déterminer les branches infinies de C_f.

b) Tracer C_f.

3)a) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Tracer la courbe $C_{f^{-1}}$.

c) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x>0$.

4)a) Vérifier que pour tout réel x on a $f(x)=e^{x}-\dfrac{e^{x}}{1+e^{x}}$.

b) Soit λ un réel strictement négatif.

Calculer l'aire $A(\lambda)$ du domaine limité par $C_{f^{-1}}$, l'axe des ordonnées et les droites d'équations respectives : $y=\lambda$ et $y=0$.

B) Pour tout entier naturel non nul n et pour tout réel négatif x, on pose $F_n(x)=\int_x^0 \dfrac{e^{nt}}{1+e^{t}}\,dt$.

1)a) Calculer $F_1(x)$ et déduire que $\lim\limits_{x\to-\infty} F_1(x)=\ln 2$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} F_2(x)$.

2)a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a $F_{n+1}(x)+F_n(x)=\dfrac{1}{n}\left(1-e^{nx}\right)$.

b) Montrer par récurrence sur n, que $F_n(x)$ admet une limite finie lorsque x tend vers $-\infty$.

Dans la suite on pose $R_n=\lim\limits_{x\to-\infty} F_n(x)$.

3)a) Vérifier que pour tout $t\le 0$, $2e^{t}\le 1+e^{t}\le 2$.

b) Montrer que pour tout entier naturel $n\ge 2$ et pour tout $x\le 0$, on a :

$$\frac{1}{2n}\left(1-e^{nx}\right)\le F_n(x)\le \frac{1}{2(n-1)}\left(1-e^{(n-1)x}\right).$$

c) En déduire un encadrement de R_n pour tout $n\ge 2$.

4) Pour tout réel négatif x et pour tout entier naturel non nul n, on pose $G_n(x)=(-1)^n\int_x^0 e^{nt}dt$.

a) Calculer $G_n(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} G_n(x)=\dfrac{(-1)^n}{n}$.

b) Montrer que $G_1(x)+G_2(x)+\ldots\ldots+G_n(x)=-F_1(x)+(-1)^nF_{n+1}(x)$.

5) On pose, pour tout entier naturel non nul n, $U_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$.

a) Montrer que $U_n=\ln 2+(-1)^{n+1}R_{n+1}$.

b) Montrer que la suite (U_n) converge et trouver sa limite.