Lycée Pilote Sfax A/S : 2020-2021	**Série N°37** (Fonction exponentielle)	4 ème Math Mr Jellali

Exercice

Dans tout l'exercice n désigne un entier naturel non nul.

A/ 1) Soit g_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g_n(x) = n(x+1) + e^x$.

a) Dresser le tableau de variation de g_n.

b) Montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α_n et que $-2 < \alpha_n < -1$.

c) En déduire le signe de $g_n(x)$ suivant les valeurs de x.

2) Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{xe^x}{n+e^x}$.

On désigne par C_n la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (f_n(x) - x)$.

En déduire que la courbe C_n admet deux asymptotes que l'on précisera.

b) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$ $f'_n(x) = \dfrac{e^x g_n(x)}{(n+e^x)^2}$.

c) Montrer que $f_n(\alpha_n) = 1 + \alpha_n$.

d) Donner le tableau de variation de f_n.

3) a) Etudier la position relative de la courbe C_n et de la droite D d'équation $y = x$.

b) Etudier la position relative des courbes C_n et C_{n+1}.

c) Tracer les courbes C_1 et C_2.(On prendra 2cm pour unité de longueur ; on donne $\alpha_1 \simeq -1.4$; $\alpha_2 \simeq -1.2$).

II/ Soient $I = \int_{-1}^{0} xe^x$ et $U_n = \int_{-1}^{0} f_n(x)dx$.

1) Calculer I.

2) Montrer que pour tout x de $[-1,0]$, $\dfrac{xe^x}{n} \leq \dfrac{xe^x}{n+e^x} \leq \dfrac{xe^x}{n+1}$.

3) Montrer que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

4) On pose $V_n = \sum\limits_{k=1}^{n} U_k$.

a) Montrer que pour tout entier naturel non nul k, $\int_{k+1}^{k+2} \frac{1}{t}\, dt \leq \dfrac{1}{k+1}$.

b) En déduire que $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k+1} \geq \ln(n+2) - \ln 2$. Montrer alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = -\infty$