Lycée pilote Bourguiba de Tunis	**Série 2:Fonction exponentielle**	**$4^{ème}$ Math**
Mr :Barhoumi	**Mathématiques**	**2020/2021**

Exercice 1:

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}, & si\ x < 0 \\ f(0) = 0 \\ x^2 \ln x, & si\ x > 0 \end{cases}$

a) Etudier la continuité de f en 0.

b) Etudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter géométriquement les résultats obtenus.

2/ a) Calculer les limites de f en -∞ et en +∞ .

b) Calculer $f'(x)$ on précisera le domaine de dérivabilité de f .

c) Etudier le signe de $f'(x)$ et établir le tableau de variation de f .

3/ Etudier les branches infinies de la courbe de f .

4/ Tracer la courbe représentative de f dans le plan de repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$.
(unité graphique 4cm)

5/ α étant un réel tel que o < α ≤ 1,calculer à l'aide d'une intégration par parties l'aire A(α) de l'ensemble des points M(x,y) tels que : $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ f(x) \le y \le 1 \end{cases}$

6/ Déterminer lim (A(α)) quand α tend vers O et interpréter le résultat obtenu.

Exercice 2 :

A) On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle [0; +∞ [par : $f(x) = \sqrt{x}e^{1-x}$.

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1)Déterminer la limite de f en +∞.Interpréter graphiquement le résultat.

2) a)Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.

b)Dresser le tableau de variation de f .

3) Tracer la courbe (C) (unité :2 cm).

4) On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel par $u_n = \int_n^{n+1} f(t)\,dt$; n > 0

a) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$.

b) En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

c) Prouver la convergence de la suite (u_n) et déterminer sa limite.

B) Soit $F(x)=\int_1^x f(t)\,dt$; $x \in [1; +\infty[$

1)Etudier le sens de variation de F sur $[1; +\infty[$

2) a) Démontrer que, pour tout réel t positif, $2+t \geq 2\sqrt{2t}$.

b) En déduire que, $F(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_1^x (t+2)e^{1-t}dt$; $x \geq 1$.

c) à l'aide d'une intégration par parties, montrer que, $\forall x \in [1; +\infty[$ $\int_1^x (t+2)e^{1-t}dt = 4-(x+3)e^{1-x}$

d) En déduire que, $\forall x \in [1; +\infty[$, $0 \leq F(x) \leq \sqrt{2}$

3) On note, pour tout entier naturel n non nul, S_n la somme des n−1 premiers termes de la suite (u_n).

a) Exprimer S_n à l'aide d'une intégrale.

b) Montrer que la suite (S_n) converge et donner un encadrement de sa limite.

<u>Problème 1:</u>

A/ On considère la fonction f définie par f(x) = $\frac{e^x}{1+e^{2x}}$ et on note (C) sa courbe dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$.

l°/a- Vérifier que f est une fonction paire. b- Dresser le tableau de variation de f. c- Tracer sa courbe (C).

2°/Soit h la restriction de f à IR_+.

a- Montrer que h réalise une bijection de IR+ su un intervalle J que l'on précisera.

b- Calculer $h^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

c- Tracer la courbe de h^{-1} dans le même repère.

B/ Soit F la fonction définie sur IR par F(x) = $\int_0^x f(t)\,dt$.

1°/ Montrer que F est impaire.

2°/ Soit G la fonction définie sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ par G(x) = F (ln(tgx)).

a- Montrer que G est dérivable sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ et calculer G'(x). b- Montrer que $\forall x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$: G(x)=x- $\frac{\pi}{4}$.

3°/a- Calculer l'intégrale : I = $\int_0^{\ln\sqrt{3}} f(t)\,dt.$

b- En déduire que: $\int_{\ln\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\ln\sqrt{3}} f(t)\,dt = \frac{\pi}{6}.$

C/ Soit n ∈ IN*, On considère la fonction H_n définie par: $H_n(x) = \int_{\frac{1}{e}}^{f(x)} (1+\ln t)^n\,dt.$

l°/ Montrer que H_n est définie sur IR et qu'elle est paire. 2°/a- Montrer que pour tout réel t > 0: 1 + lnt ≤ t.

b- En déduire que quelque soit n ∈ IN* : 0 < $H_n(0) \leq \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n(0)$.

3°/ Calculer $H_1(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} H_1(x) = \frac{1}{e}$.

4°/a)Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que ∀ n ∈ IN*:$H_{n+1}(x) = f(x)[1 + \ln f(x)]^{n+1} - (n + 1)H_n(x)$.

b- Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} x$ $(1 + \ln x)^n$ =0.c-Montrer, par récurrence, que H_n admet une limite finie et non nulle lorsque x tend vers +∞ (On notera L_n cette limite). d-Montrer que pour tout n ∈ IN*: $L_{n+1}= -(n +1)L_n$ et que

$L_n=(-1)^{n+1}\frac{n!}{e}$.

<u>Problème 2 :</u>

A/Soit pour tout $x \in]-1,+\infty[$: $f(x) = \frac{e^x}{1+x}$ et $g(x) = \frac{e^x}{(1+x)^2}$.

On désigne par (C)et (C') les courbe représentatives de f et g dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1)Etudier les variations de f et g et vérifier que pour tout $x \in]-1,+\infty[$, g(x)=f(x) - f'(x).

2)a)Etudier la position relative de (C)et (C').

c)Tracer (C)et (C').

3)Calculer l'aire de la partie du plan limité par (C)et (C')et les droites d' équation x=0 et x=1.

B/On considère $J = \int_0^1 f(t)\,dt$.

1)Montrer que $1 \leq J \leq \frac{e}{2}$.

2)Soit (U_n)la suite définie par $U_0 = \int_0^1 e^t dt$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n = (-1)^n \int_0^1 t^n e^t dt$.

a)Calculer U_0 et U_1. b)A l'aide d'une intégration par parties ,montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = (-1)^{n+1} e + (n+1)U_n$.

3)Dans cette question, on suppose que $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k$ et $R_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 t^{n+1} f(t) dt$.

a)Vérifier $\forall t \in [0,1]$, $\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + ... + (-1)^n t^n + \frac{(-1)^{n+1} t^{n+1}}{1+t}$.

b)En déduire que J = S_n + R_n. c)Montrer que $|R_n| \le \frac{e}{2(n+2)}$.

d)En déduire que la suite (S_n)est convergente et donner sa limite.

C/Pour tout $x \in \left]\frac{1}{e}, +\infty\right[$, on pose : $F(x) = \int_0^{\ln x} f^2(t) dt = \int_0^{\ln x} \frac{e^{2t}}{(1+t)^2} dt$.

1)Montrer que F est définie et dérivable sur $\left]\frac{1}{e}; +\infty\right[$ et calculer F'(x).

2)Montrer que pour tout $x \in \left]\frac{1}{e}, 1\right]$, on a $F(x) \le x^2 \left(1 - \frac{1}{1+\ln x}\right)$. En déduire $\lim_{x \to \left(\frac{1}{e}\right)^+} F(x)$

3)a)En intégrant par parties , montrer que pour tout $x \in \left]\frac{1}{e}, +\infty\right[$: $F(x) = \frac{x^2}{2(1+\ln x)^2} - \frac{1}{2} + \int_0^{\ln x} \frac{e^{2t}}{(1+t)^3} dt$.

b)En déduire que , pour tout $x \in]1, +\infty[$: $F(x) \ge \frac{x^2}{2(1+\ln x)^2} - \frac{1}{2}$. Calculer $\lim_{x \to +\infty} F(x)$.

<u>Problème 3:</u>

Pour tout entier n strictement positif , on considère la fonction f_n définie par : $f_n(x) = (1-x)^n e^{\frac{x}{2}}$.

On note $(\mathcal{C}_n)$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

A/I/Etude pour n=1

1)Etudier les variations de f_1.

2)Tracer $(\mathcal{C}_1)$.

3)A l'aide d'une intégration par parties , calculer pour $x \in \mathbb{R}$,l'intégrale $F_1(x) = \int_0^{1-2x} f_1(t) dt$.

4)En déduire l'aire du domaine limité par la courbe $(\mathcal{C}_1)$, l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.

II/Etude des fonctions f_n pour $n > 1$.

1)Montrer que toute les courbes $(\mathcal{C}_n)$ passent par deux points fixes.

2)Montrer que $\lim_{x \to -\infty} f_n(x) = 0$.

3) Etudier les variations de f_n (On envisagera les cas n pair et n impair).

B/Etude des primitives de f_n.

Pour tout entier naturel n strictement positif, on pose $F_n(x) = \int_0^{1-2x} f_n(t)\,dt$.

1)Justifier l'existence de $F_n(x)$ pour tout réel x.

2)Montrer que F_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $F_n'(x) = -2f_n(1-2x)$.

3)Etudier le sens de variation de F_n suivant la parité de n.

C/Etude de la limite de $F_n(x)$ quand x tend vers $-\infty$.

1)Soit g_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g_n(x) = (1-x)^n$; $n \in \mathbb{N}^*$.

Etudier les variations de g_n suivant la parité de n.

2)Soit n un entier naturel impair et x un réel de $]-\infty, 0[$.

a)Montrer que pour tout réel $t \in [1, 1-2x]$ on a : $(1-t)^n e^{\frac{t}{2}} \leq (1-t)^n e^{\frac{1}{2}}$.

b)En déduire que $\int_1^{1-2x} f_n(t)\,dt \leq -2^{n+1}\sqrt{e}\,\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.

c)Montrer que $F_n(x) \leq F_n(0) - 2^{n+1}\sqrt{e}\,\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.

d)En déduire $\lim_{x \to -\infty} F_n(x)$.

3)Soit n un entier naturel pair et x un réel de $\left]-\infty, -\dfrac{1}{2}\right[$.

a)Montrer que pour tout réel $t \in [2, 1-2x]$ on a : $(1-t)^n e^{\frac{t}{2}} \geq e^{\frac{t}{2}}$.

b)En déduire que $\int_2^{1-2x} f_n(t)\,dt \geq 2e\left(e^{-\frac{1+2x}{2}} - 1\right)$.

c)Montrer que: $F_n(x) \geq F_n\left(-\dfrac{1}{2}\right) + 2e\left(e^{-\frac{1+2x}{2}} - 1\right)$.

d)En déduire $\lim_{n \to -\infty} F_n(x)$.

D/Etude de la limite de $F_n(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Dans cette partie on admettra que , pour tout entier naturel n , $F_n(x)$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$ et on note $L_n = \lim_{x\to+\infty} F_n(x)$.

1)En utilisant le résultat du A/I/3), montrer que $L_1 = -6$.

2)a)Démontrer que pour tout entier naturel n strictement positif et pour tout réel x , on a :

$F_{n+1}(x) = 2^{n+2}x^{n+1}e^{\frac{1-2x}{2}} - 2 + 2(n+1)F_n(x)$.

b)En déduire que $L_{n+1} = -2 + 2(n+1)L_n$.

3)Pour tout entier naturel n strictement positif, on pose $v_n = \dfrac{L_n}{2^n n!}$.

a)Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n strictement positif ,

$v_n = -2\left[1 + \dfrac{1}{2\times 1!} + \dfrac{1}{2^2\times 2!} + \dots\dots\dots \dfrac{1}{2^n n!}\right]$.

b)En déduire L_n.

E/Détermination de $\lim_{n\to+\infty} v_n$.

Pour tout entier naturel n strictement positif, on pose $u_n = \dfrac{F_n(0)}{2^n n!}$.

1)Montrer que $u_1 = 2\sqrt{e} - 3$.(On utilisera le résultat de A/I/4).

2)a)Montrer que $u_{n+1} = -\dfrac{2}{2^{n+1}(n+1)!} + u_n$.

b)En déduire que pour tout entier naturel $n > 0$, $u_n = v_n + 2\sqrt{e}$.

3)a)Montrer que pour tout réel $x \in [0,1]$ et pour tout entier naturel $n > 0$, $0 \le f_n(x) \le 1$.

b)Montrer alors pour tout entier naturel $n > 0$ et pour tout $x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, $0 \le F_n(x) \le 1$.

c)En déduire que pour tout entier naturel $n > 0$, $0 \le u_n \le \dfrac{1}{2^n n!}$.

d)En déduire que $\lim_{n\to+\infty} v_n = -2\sqrt{e}$