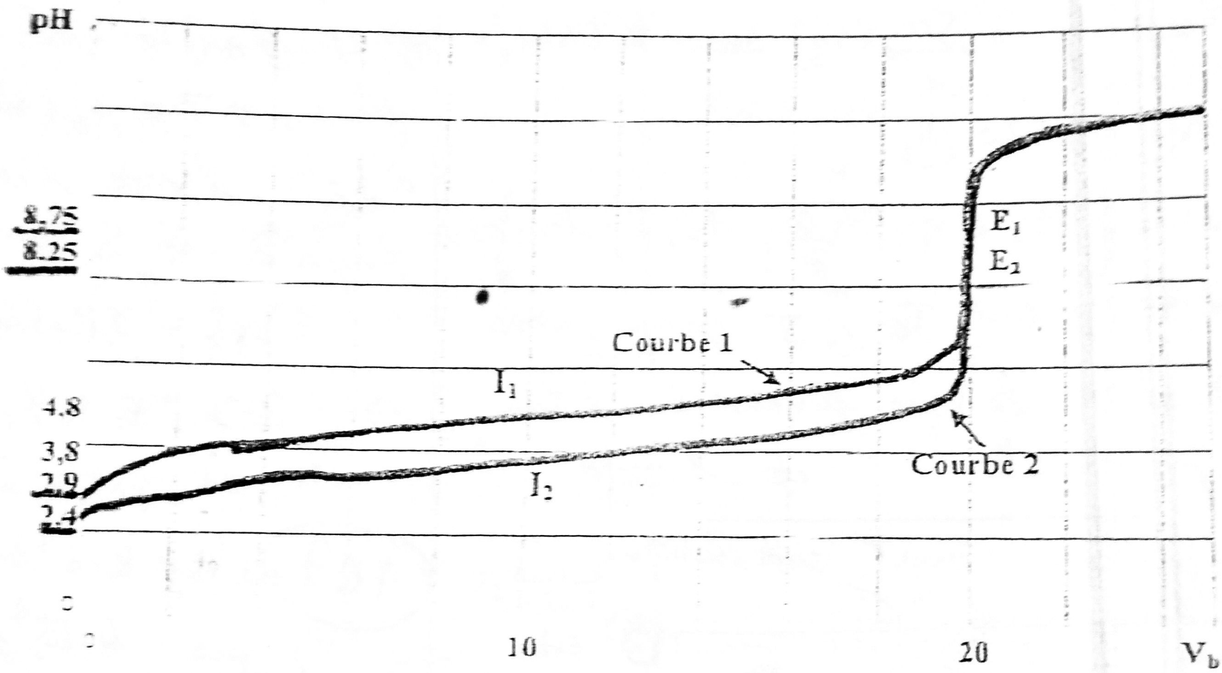
Exercice n°3. Bac 2000

Dans un examen de travaux pratiques un groupe de trois élèves est chargé d'effectuer le dosage d'un volume V_A= 20 ml d'une solution d'acide éthanoïque CH_3COOH (C_1 =0,1 mol.L^{-1} et pKa_1= 4,8) puis d'un même volume d'acide méthanoïque HCOOH (C_2=0,1 mol.L^{-1} et pKa_2= 3,8). Pour ces deux dosages on utilise la même solution aqueuse d'hydroxyde de sodium NaOH, base forte de concentration C_b=0,1 mol.L^{-1}. Sur la figure sont portés les deux courbes de dosage et où la courbe 1 correspond au dosage de CH_3COOH et la courbe 2 pour HCOOH.

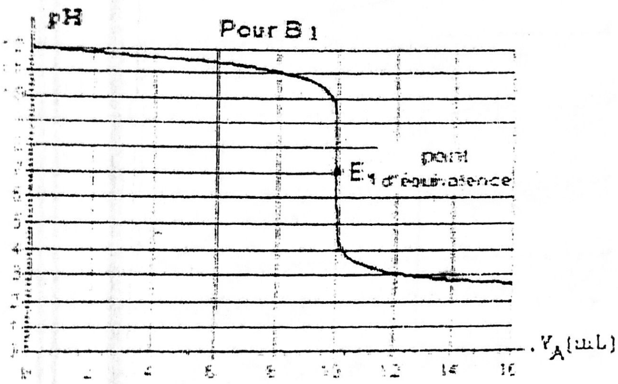


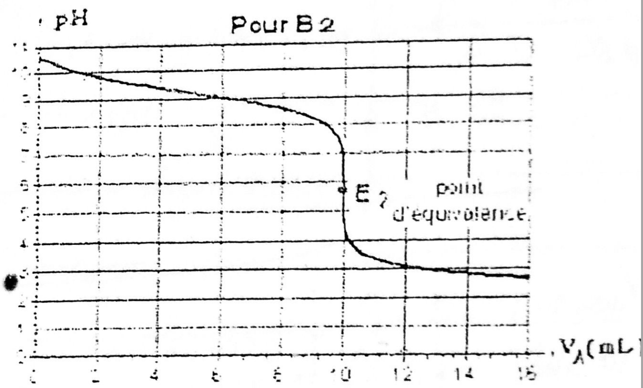
1) L'exploitation des résultats des mesures effectués au cours des deux dosages a été abordée différemment par les trois candidats et ce dans le but de classer les deux acides étudiés par force croissante.
   a) Le premier candidat a comparé les pH des deux solutions acides avant l'ajout de la base.
   b) Le second s'est intéressé aux valeurs des pH à la demi-équivalence.
   c) Le troisième a étudié les valeurs des pH à l'équivalence.
   Donner la classification obtenue par chaque candidat en justifiant à chaque fois la démarche utilisée.

2) On prélève à l'aide d'une pipette un volume V_A=20 ml de la solution aqueuse de CH_3COOH. On prépare une solution (S) en ajoutant dans un bécher un volume x d'eau pure à la prise d'essai V_A. On dose la solution (S) de volume total V=(V_A + x), par la même base que précédemment. On constate que la valeur du pH à l'équivalence diffère de 0,2 de la valeur obtenue au cours du dosage décrit à la question 1)
   a) Indiquer si cette variation du pH est une diminution ou une augmentation. Déterminer la valeur de x ;
   b) Calculer la valeur du pH de (S) avant l'ajout de la base forte

Exercice n°6.

1) On dispose de deux solutions basiques (S_1) et (S_2) de même concentration molaire C_B et préparées respectivement à partir de deux monobases B_1 et B_2. On dose un volume $V_B = 10\ cm^3$ de chacune des deux solutions par la même solution d'acide chlorhydrique de concentration C_A, on obtient les courbes ci-dessous :
   a) Justifier que l'une des deux bases est forte et que l'autre est faible.
   b) Déterminer graphiquement, la concentration C_B, C_A et le pKa du couple acide-base correspondant à la base faible.
2) Pour chacun des deux cas, écrire l'équation de la réaction du dosage et retrouver par le calcul la valeur prise par le pH au point d'équivalence.
3) Vérifier qu'après l'addition d'un volume V_A=20 mL, les deux mélanges auront un même pH que l'on déterminera.





4) On désire préparer une solution tampon, par mélange de la solution d'acide chlorhydrique précédente avec l'une des solutions basiques (S_1) et (S_2).
   a) Quelles sont les propriétés d'une solution tampon ?
   b) Indiquer la solution basique qui convient le mieux à cette préparation.
5) A l'aide de la solution choisie, on désire préparer un mélange tampon de pH=9,2. Pour cela on réalise l'une des expériences suivantes :

Expérience 1

A un volume V_0 = 20 mL de la solution de base choisie, on ajoute, à l'aide d'une burette graduée de 25 mL, la solution d'acide chlorhydrique de concentration molaire C_A jusqu'à ce que le pH-mètre indique une valeur égale à 9,2.

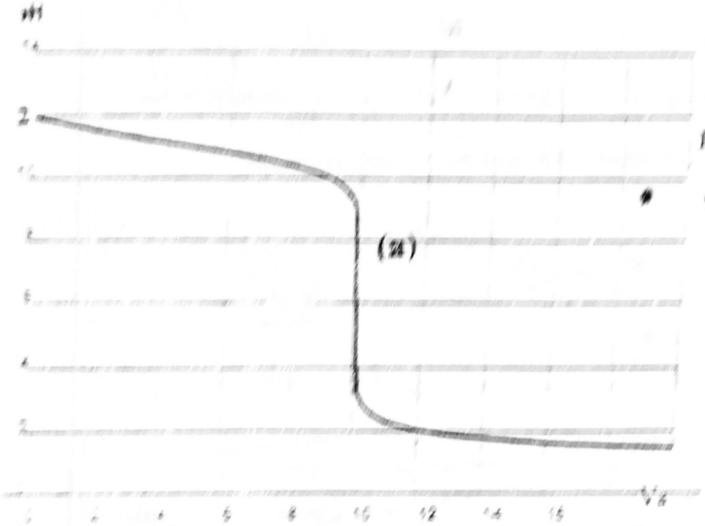
Expérience 2

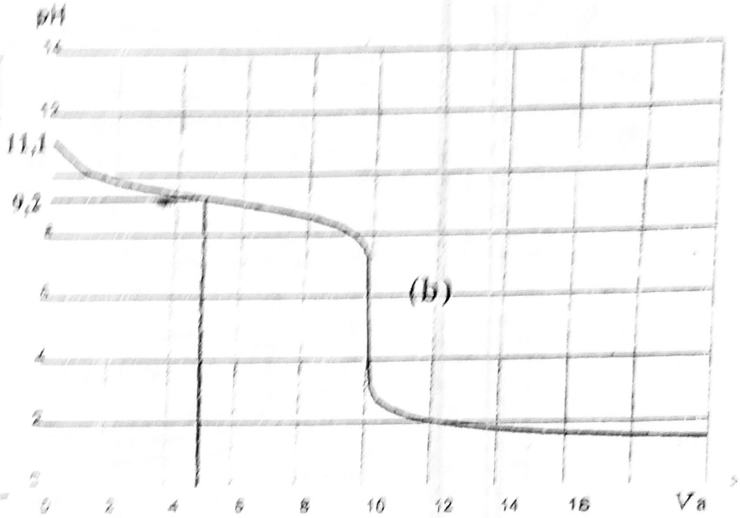
A un volume V_0 = 20 mL de la solution de base choisie, on ajoute, à l'aide d'une burette graduée de 25 mL, de l'eau distillée jusqu'à que le pH-mètre indique une valeur égale à 9,2.

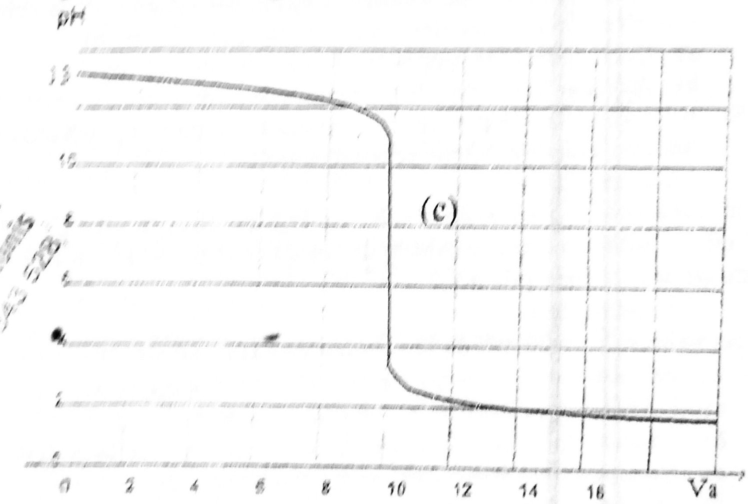
a) Calculer le volume de la solution d'acide à ajouter dans le cas de la première expérience.
b) Calculer le volume d'eau à ajouter dans le cas de la deuxième expérience.
c) Combien de fois fallait-il remplir la burette dans chacune des deux expériences ?
d) Quelle est l'expérience qui vous semble la plus simple à réaliser ?

Exercice n°9.

On considère trois solutions aqueuses S_1, S_2 et S_3 de base B_1, B_2 et B_3 de même concentration molaire $C_B=0.1 mol.L^{-1}$. On réalise un dosage pH métrique d'un volume $V_B=10$ ml de chacune des ces trois solutions par une solution aqueuse de chlorure d'hydrogène de concentration $C_A=0.1 mol.L^{-1}$. Les résultats de ces dosages ont donnés les courbes suivantes :







170

1) On donne la classification par force croissante des 3 bases $B_3 < B_2 < B_1$

a) En utilisant les pH initiaux des solutions S_1, S_2 et S_3 attribuer à chaque courbe la base utilisée. Montrer que B_1 est une base forte

b) Déterminer graphiquement le pKa_2 du couple BH_2^+/B_2.

c) Justifier le caractère acide, basique ou neutre du mélange obtenu à l'équivalence pour les dosages relatifs aux bases B_1 et B_2.

2) Au mélange obtenu à l'équivalence au cours du dosage la solution S_3 on ajoute 10 ml de la même solution S_3. Déterminer le pH du mélange obtenu. Quelles sont les propriétés de la solution obtenue ?

3) On refait le dosage de la solution S_3 en ajoutant au volume initial (V_B=10 ml) un volume Ve d'eau ; on constate que le pH initial de la solution S_3 varie de 0,15 : Calculer Ve ainsi que le pH à l'équivalence

Ex 3 : BAC 2000

1°) a) A concentrations égales, l'acide le plus fort possède le pH le plus faible.

$\Rightarrow$ HCOOH est un acide plus fort que CH_3COOH.

A la $\frac{1}{2}$ équivalence, pH = pKa.

L'acide le plus fort lui correspond le pka le plus faible donc : HCOOH est plus fort que CH_3COOH.

b) Plus un acide est fort, plus le pH à l'équivalence est proche de 7, donc d'après le graphe HCOOH est plus fort que CH_3COOH.

En effet : * A l'équivalence, le milieu contient la base conjuguée de l'acide faible, les deux bases ont la même concentration, donc la base la plus forte lui correspond le pH le plus élevé.

D'après le graphe, CH_3COO^- est une base plus forte que $HCOO^-$ $\Rightarrow$ HCOOH est un acide plus fort que CH_3COOH.

2°/a) $pH_E = \frac{1}{2}(pKa + pKe + \log[CH_3COO^-])$

avec $[CH_3COO^-] = \frac{C_AV_A}{V_A+V_{BE}}$

En ajoutant de l'eau, on a :

$[CH_3COO^-]' = \frac{C_AV_A}{V_A+V_{BE}+x} < [CH_3COO^-]$

d'où pH_E diminue : $pH_E' < pH_E$

Conclusion : il s'agit d'une diminution du pH.

* $pH_E - pH_E' = \left(\frac{1}{2}pKa + \frac{1}{2}pKe + \frac{1}{2}\log\frac{C_AV_A}{V_A+V_{BE}}\right) - \left(\frac{1}{2}pKa + \frac{1}{2}pKe + \frac{1}{2}\log\left(\frac{C_AV_A}{V_A+V_{BE}+x}\right)\right)$

$0,2 = \frac{1}{2}\log\left(\frac{\frac{C_AV_A}{V_A+V_{BE}}}{\frac{C_AV_A}{V_A+V_{BE}+x}}\right)$

$\log\left(\frac{V_A+V_{BE}+x}{V_A+V_{BE}}\right) = 0,4$

$\frac{V_A+V_{BE}+x}{V_A+V_{BE}} = 0,4$

$\Leftrightarrow x = (V_A+V_{BE})(10^{0,4}-1) = 60,4\ mL$

$x = 60,4\ mL$

b°) $pH_{Acide} = \frac{1}{2}pKa - \frac{1}{2}\log c'$

$= \frac{1}{2}pKa - \frac{1}{2}\log\left(\frac{C_AV_A}{V_A+x}\right)$

$= \frac{1}{2}(4,8) - \frac{1}{2}\log\left(\frac{0,1 \cdot 20 \cdot 10^{-3}}{80,4 \cdot 10^{-3}}\right)$

$pH_{acide} = 3,2$

Avant dosage

(171)

Ex 6

1°) a/ La courbe de B_1 présente un seul point d'inflexion donc B_1 est une base forte.

* La courbe de B_2 présente 2 pts d'inflexions $\Rightarrow$ B_2 est une base faible.

b°) B_1 est une base forte, donc :

$pH_i = pKe + \log C_B = 12$

$C_B = 10^{pH_i - pKe} = 10^{-2}\ mol.L^{-1}$

A l'équivalence : $C_AV_{AE} = C_BV_B$

$C_A = \frac{C_BV_B}{V_{AE}} = \frac{10^{-2} \cdot 10}{10} = 10^{-2}\ mol.L^{-1}$

A la demi-équivalence :

$pH = pKa(B_2H^+/B_2)$

$= 9,2$ (d'après la courbe de B_2)

2°/ Pour B_1 : $OH^- + H_3O^+ \longrightarrow 2H_2O$

A l'équivalence, milieu neutre

$pH = \frac{1}{2}pKe = 7$ à 25°C

Pour B_2 : $B_2 + H_3O^+ \longrightarrow B_2H^+ + H_2O$

A l'équivalence, le milieu contient l'acide conjugué de B_2,

$pH = \frac{1}{2}pKa - \frac{1}{2}\log[B_2H^+]$, $[B_2H^+] = \frac{C_BV_B}{V_B+V_{AE}}$

$pH = \frac{1}{2}(9,2) - \frac{1}{2}\log\left(\frac{10^{-2} \cdot 10}{10+10}\right)$

3°) Après l'équivalence, la solution contient l'acide fort HCl. $pH = -\log\left(\frac{C_A V_A}{V_B + V_A}\right)$

$pH = -\log\left(\frac{10^{-2} \cdot 20}{10 + 20}\right) = 2{,}17$

4°) a) C'est une solution dont le pH varie peu par addition d'acide, de base ou de l'eau en proportions modérées.

b) La solution qui convient le mieux est (S_2) car il s'agit d'un dosage de base faible par un acide fort. A la demi-équivalence $pH = pKa$ donc on a une solution tampon.

5°) a) A l'équivalence : $C_A V_{AE} = C_B V_0$

$\Rightarrow V_{AE} = \frac{C_B V_0}{C_A} = \frac{10^{-2} \cdot 20 \cdot 10^{-3}}{10^{-2}}$

$V_{AE} = 20\,mL$

- A la demi-équivalence on a :

$pH = pKa = 9{,}2$

et $V_A = \frac{V_{AE}}{2} = 10\,mL$

$\Rightarrow$ le volume de la solution d'acide à ajouter dans le cas de la 1ère expérience est $V_A = 10\,mL$.

b°) En négligeant les ions provenants de l'ionisation propre de l'eau on a :

	B_2 +	H_2O ⇌	B_2H^+ +	OH^-
t_0	C_B	−	0	0
t_f	$C_B - y_f$	−	y_f	y_f

$pH = pKa \Leftrightarrow \frac{[B_2][H_3O^+]}{[B_2H^+]} = [H_3O^+]$

$\Leftrightarrow [B_2] = [B_2H^+]$

$y_f = C - y_f \Leftrightarrow 2y_f = C$

$2\tau_f = 1 \Leftrightarrow \tau_f = 0{,}5$

172

avec : $\tau_f = \frac{[OH^-]}{C'_B} = \frac{10^{pH_f - pKe}}{C'_B}$

d'où $C'_B = \frac{10^{9{,}2 - 14}}{\tau_f}$ avec $\tau_f = 0{,}5$

$\Rightarrow C'_B = 3{,}16 \cdot 10^{-5}\,mol\,L^{-1}$

- $C'_B = \frac{C_B V_0}{V_0 + V_e} \Rightarrow V_e = 6309{,}1\,mL$

c°) Pour l'expérience (1), il faut remplir la burette une seule fois

- expérience (2), il faut remplir la burette n fois avec $n = \frac{6309}{25}$

$n \simeq 252$ fois

d) L'expérience (1) est la plus simple à réaliser.

Ex 9 :

1°) a) A concentrations égales, la base la plus forte lui correspond le pH le plus élevé. D'après les graphes

c ⟶ B_1

a ⟶ B_2

b ⟶ B_3

- Comparons pour la base B_1, la concentration $[OH^-]_i$ avec C_B

$[OH^-]_i = \frac{Ke}{[H_3O^+]} = 10^{pH_i - pKe}$

$= 10^{13-14} = 10^{-1}\,mol\,L^{-1}$

$[OH^-]_i = 10^{-1}\,mol\,L^{-1} = C_B$

- d'où B_1 est une base forte.

Remarque : On peut répondre autrement et dire que la courbe c présente un seul pt d'inflexion donc elle représente le dosage d'une base forte par un acide fort $\Rightarrow B_1$ ...

b) A la demi-équivalence, on a :

$pH = pKa$.

d'après la courbe (b) : $pKa = 9,2$

* Pour la base B_1, à l'équivalence le milieu contient de l'eau et des ions inertes donc : $[H_3O^+] = [OH^-] = \frac{1}{2} pKe = 7$ à 25°C

$\Longleftrightarrow$ Milieu neutre

* Pour la base B_3 (faible), à l'équivalence, le milieu contient les ions B_3H^+, acide conjugué de B_3. B_3H^+ réagit avec l'eau selon : $B_3H^+ + H_2O \rightleftharpoons B_3 + H_3O^+$

$[H_3O^+] > [OH^-]$, donc le milieu est acide.

2c/ A l'équivalence, le milieu contient $C_B.V_B = 10^{-1}.10^{-2} = 10^{-3}$ mole d'ions B_3H^+.

On ajoute au mélange, $C_B V_B = 10^{-3}$ mole de B_3 (base faible) $\Rightarrow$

$$n_{B_3H^+} = n_{B_3}$$

d'où $[B_3H^+] = [B_3]$

$\Longleftrightarrow pH = pKa(B_3H^+/B_3) = 9,2$

. il s'agit d'une solution tampon dont le pH varie très faiblement par ajout d'acide, de base ou de l'eau en proportions modérées.

173

3°/ B_3 est une base faiblement ionisée

$pH_{B_3} = \frac{1}{2} pKa + \frac{1}{2} pKe + \frac{1}{2} \log C_{B_3}$

L'ajout de l'eau fait baisser la concentration C_B donc la diminution du pH_i. Conclusion : $pH'_i = pH_i - 0,11$

$pH'_i = 11,1 - 0,15 = 10,95$

$= \frac{1}{2} pka + \frac{1}{2} pKe + \frac{1}{2} \log\left(\frac{C_B V_B}{V_B + V_e}\right)$

$\Rightarrow \log\left(\frac{C_B V_B}{V_B + V_e}\right) = -1,3$

$\Longleftrightarrow V_e = \frac{C_B V_B}{10^{-1,3}} - V_B$

$V_e = \frac{0,1 . 10^{-2}}{10^{-1,3}} - 20 \text{ mL}$

$V_e = 9,98 \text{ mL} \simeq 10 \text{ mL}$

* A l'équivalence le milieu contient les ions B_3H^+ donc :

$pH_E = \frac{1}{2} pKa - \frac{1}{2} \log [B_3H^+]$

$= \frac{1}{2}\left(pKa - \log\left(\frac{C_B V_B}{V_B + V_{AE} + V_e}\right)\right)$

$pH_E = \frac{1}{2}\left(9,2 - \log\left(\frac{10^{-3}}{30.10^{-3}}\right)\right)$

$pH_E = 5,33$

208

Exercice n°1.

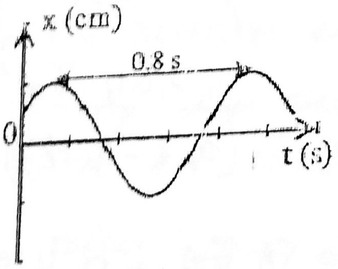
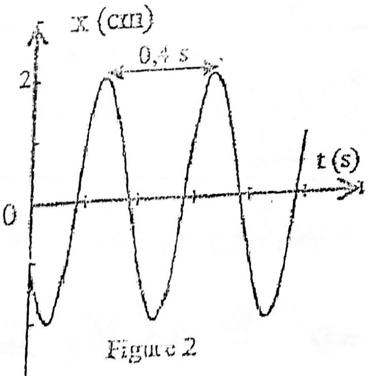
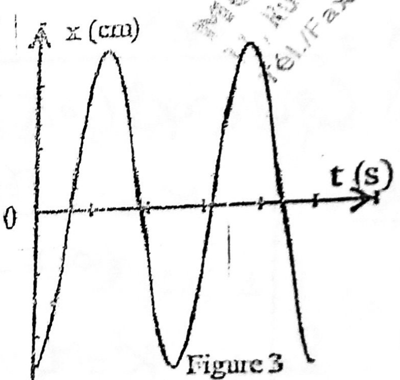
Un pendule élastique est constitué d'un solide (S) de masse m=40 g suspendu à l'extrémité d'un ressort horizontal de raideur k=200 N.m^{-1}. l'oscillateur est excité par une force F(t) de la forme F(t)=Fm sin (20 πt). Le solide (S) est soumis à une force dissipative f= - 0,6 V. La variation de la vitesse du centre d'inertie de (S) est donnée par V=3 sin (20 πt + ϕ_V) en m.s^{-1}.

On prendra π^2=10.

1) En précisant l'analogie entre grandeurs électriques et mécaniques :
   a) Ecrire l'équation différentielle du mouvement relative à la variable v.
   b) Exprimer et calculer l'amplitude Fm de la force excitatrice.
   c) Exprimer et calculer le déphasage ($\phi_F - \phi_V$).
   d) Exprimer et calculer la puissance moyenne mécanique dissipée par l'oscillateur.
2) Montrer que pour obtenir la résonance de vitesse, en utilisant la même pulsation de la force excitatrice, on doit accrocher au solide (S) une surcharge m' que l'on déterminera.
3) Calculer dans cas, la valeur maximale de la vitesse et l'énergie dissipée par l'oscillateur en une minute.
4) Donner sur un même graphe les allures de F(t) et f(t) à la résonance de vitesse.

Exercice n°2

Un ressort de raideur K=8 N.m^{-1} est attaché à un solide (S) de masse m=100 g. Au cours de son mouvement (S) est soumis à une force F=F$_m$sin2πNt et à une force de frottement de type visqueux f= - hV. Pour différentes valeurs de la fréquence N, on a représenté les courbes de variations au cours du temps de l'élongation x(t)=X$_m$sin(ωt+ φx) du centre d'inertie G du solide:

N	1,25 Hz	2,5 Hz	
Courbes	 Figure 1	 Figure 2	 Figure 3

1) Montrer à partir du tableau ci-dessus que le solide (S) effectue des oscillations forcées.
2) pour N=2,5 Hz, déterminer la phase φx.
3) Montrer que la courbe de la figure (3) correspond à la résonance de vitesse. Donner dans ces conditions l'expression de la vitesse instantanée V(t) et en déduire l'amplitude des oscillations.
4) Montrer en le justifiant que la courbe de la figure (1) comporte une erreur.
5) La figure 4 représente les variations de $X_m = f(T)$. Sachant que pour un oscillateur électrique forcé on a $Q_m = \frac{U_m}{\sqrt{(R\omega)^2 + (L\omega^2 - \frac{1}{C})^2}}$.
   Par analogie, donner l'expression de X$_m$ en fonction de F$_m$, h, m, k et de la période T.
6) En déduire la valeur limite de X$_m$ lorsque la période T tend vers l'infini.
7) Tracer sur le même graphe, la courbe X_m=f(T) pour un coefficient de frottement plus important.

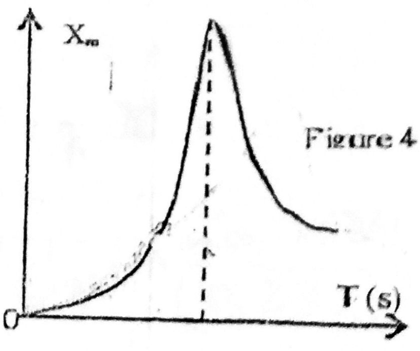


Figure 4

(résonance de vitesse)

Ex 1

1°/ a) Pour un oscillateur électrique forcé,

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int i(t)dt = u(t)$$

$\frac{1}{C} \longleftrightarrow k$; $L \longleftrightarrow m$; $R \longleftrightarrow h$

$u(t) \longrightarrow F(t)$, $i(t) \longrightarrow v(t)$

donc par analogie on a :

$$m\frac{dv}{dt} + hv + k\int v(t)dt = F(t)$$

b) on a :

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \longrightarrow V_{max} = \frac{F_m}{\sqrt{h^2 + \left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right)^2}}$$

$$\Rightarrow F_m = V_{max} \cdot \sqrt{h^2 + \left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right)^2}$$

A.N : $k = 200\,N.m^{-1}$, $\omega = 20\pi\ rad\,s^{-1}$

$m = 0{,}04\,kg$ et $h = 0{,}6\,kg\,s^{-1}$

$\Rightarrow F_m = 2{,}7N$

c) $tg(\varphi_u - \varphi_i) = \dfrac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} \longrightarrow tg(\varphi_F - \varphi_v) =$

$$tg(\varphi_F - \varphi_v) = \frac{m\omega - k/\omega}{h} = -1{,}11$$

donc $\varphi_F - \varphi_v = -0{,}8\,rad.$

d) $P_{moy}(élec) = \frac{1}{2}R I_{max}^2 \longrightarrow P_{méca} = \frac{1}{2} h V_{max}^2$

$= 2{,}7W.$

2°/ Par analogie avec la résonance d'intensité, la résonance de vitesse est réalisée lorsque $\omega = \omega_0$

Dans notre cas, $\omega = 20\pi = 62{,}8\,rad\,s^{-1}$

et $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{200}{0{,}04}} = 70{,}71\,rad\,s^{-1}$

on a $\omega < \omega_0$ donc il faut diminuer ω_0, k est constante donc on doit augmenter la masse : soit $m_{totale} = m + m'$

$$m_{totale} = \frac{k}{\omega^2} = 0{,}05\,kg$$

$\Leftrightarrow m' = m_{totale} - m = 0{,}01\,kg$

3°/ Dans ce cas, on a : $V_{max} = \dfrac{F_{max}}{h}$

$V_{max} = 4{,}5\,m\,s^{-1}$

* $W_{dissip} = P \cdot \Delta t$

$= \frac{1}{2} h V_{max}^2 \cdot \Delta t$

AN : $W_{dissip} = \frac{1}{2} \cdot (0{,}6) \cdot (4{,}5)^2 \cdot 60$

$= 364{,}5\,J$

4°/ A la résonance de vitesse :

$F(t) = h\,v(t)$ (par analogie avec $u(t) = R\,i(t)$ à la résonance d'intensité)

$\Rightarrow F(t) = -f(t) \Leftrightarrow$

F(t) et f(t) sont en opposition de phase.

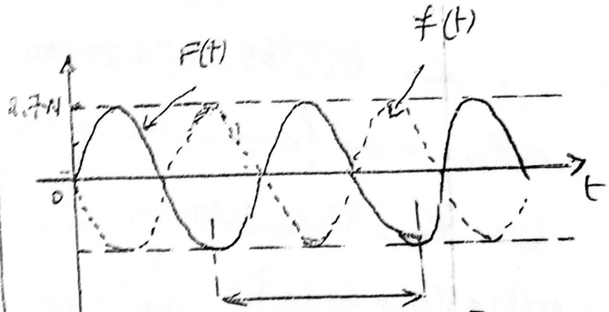
$F(t) = 2{,}7 \sin(20\pi t)$

$f(t) = f_{max} \sin(20\pi t + \pi)$

$= -h V_{max} \sin(20\pi t + \pi)$

$f(t) = -2{,}7 \sin(20\pi t + \pi)$

209



$T = 0{,}1\,s = \frac{2\pi}{\omega}$

$\omega = 20\pi\,rad\,s^{-1}$

Ex2 :

1°/ Pour fig 1 : $N = 1{,}25\,Hz$

or $N_{osci} = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}8} = 1{,}25\,Hz$

• Pour fig 2 : $N = 2{,}5\,Hz$

$N_{osci} = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}4} = 2{,}5\,Hz$

⇒ les oscillations de x ont la même fréquence que celle de l'excitateur.
d'où les oscillations sont forcées.

2°/ Fig 2 :

$x(0) = X_m \sin\varphi_x = -\frac{X_m}{2}$ ⇔ $\sin\varphi_x = -\frac{1}{2}$

$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} < 0$ ⇔ $\cos\varphi_x < 0$

d'où $\varphi_x = \frac{7\pi}{6}$ rad

3°) fig 3 :

φ_x ? $x(0) = X_m \sin\varphi_x = -X_m$

⇒ $\sin\varphi_x = -1$ et

$\varphi_x = -\pi/2$ rad

• donc $\varphi_v = \varphi_x + \pi/2 = 0$ rad

or $\varphi_F = 0$ rad (d'après l'expr de $F(t)$)

⇔ $\varphi_F = \varphi_v$: résonance de vitesse.

• $v(t) = V_{max} \sin(\omega t + \varphi_v)$

$\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{8}{0{,}1}} = 8{,}94\ rad\,s^{-1}$

et $V_{max} = \frac{F_{max}}{h}$

• $X_{max} = \frac{V_{max}}{\omega} = \frac{F_{max}}{\omega h}$ avec $\omega = \omega_0$

4°/

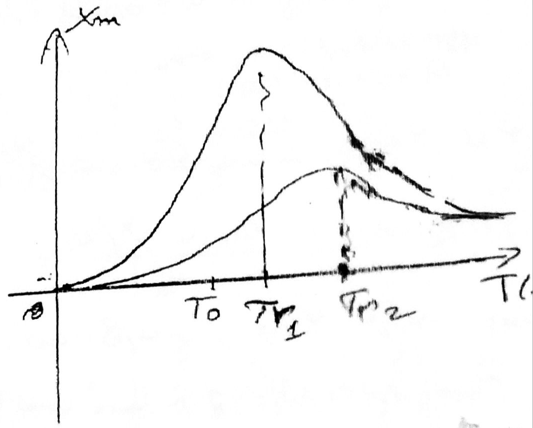
5°/ Par analogie :

$$X_m = \frac{F_m}{\sqrt{\left(h\cdot\frac{2\pi}{T}\right)^2 + \left(m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 - k\right)^2}}$$

6°) lorsque $T \longrightarrow +\infty$ on a :

$X_m \longrightarrow \frac{F_m}{k}$

7°)



2010

B/ pH des solutions aqueuses

I-Notion de pH

1-Définition : Le pH est une grandeur sans unité exprimé par un nombre positif lié à la molarité des ions H_3O^+ d'une solution aqueuse. Il permet de caractériser l'acidité, ou la basicité d'une solution aqueuse. Il est définit par la relation suivante :

$$pH = -\log[H_3O^+]\ ; \quad [H_3O^+] = 10^{-pH}$$

<u>Cette relation n'est pas valable pour les solutions concentrées pour lesquelles la concentration molaire est supérieure à 10^{-1} mol. L^{-1}.</u>

2-Echelle de pH

*<u>Solution neutre</u> : $[H_3O^+] = [OH^-]$, multiplions par $[H_3O^+]$ des deux cotés :

$[H_3O^+]^2 = K_e$; appliquant -log $\Rightarrow$ $-log[H_3O^+]^2 = -logK_e$ = pKe

$pK_e = -2\log[H_3O^+] = 2\,pH$ $\Rightarrow$ $pH = \frac{1}{2}\,pK_e$=7 à 25°C.

2/11

*<u>Solution basique</u> : $[H_3O^+] < [OH^-]$, multiplions par $[H_3O^+]$ des deux cotés :

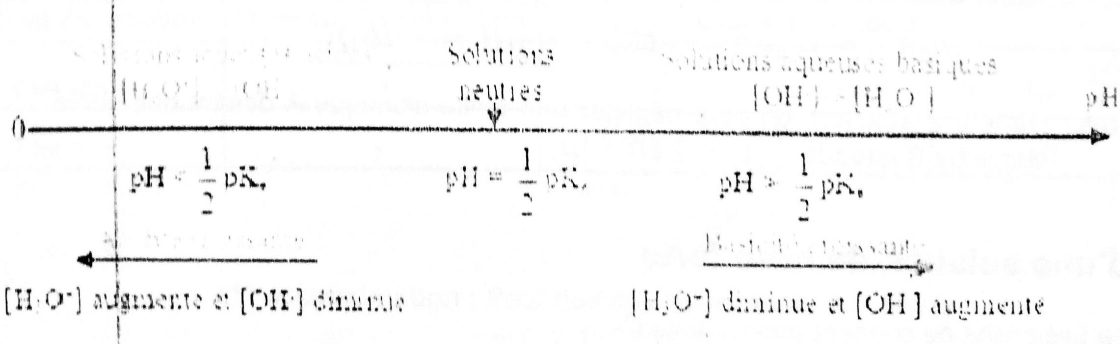
$[H_3O^+]^2 < K_e$; appliquant -log $\Rightarrow$ $-log[H_3O^+]^2 > -logK_e$

$pK_e < -2\log[H_3O^+] = 2\,pH$ $\Rightarrow$ $pH > \frac{1}{2}\,pK_e$=7 à 25°C.

*<u>Solution acide</u> : $[H_3O^+] > [OH^-]$, multiplions par $[H_3O^+]$ des deux cotés :

$[H_3O^+]^2 > K_e$; appliquant -log $\Rightarrow$ $-log[H_3O^+]^2 < -logK_e$

$pK_e > -2\log[H_3O^+] = 2\,pH$ $\Rightarrow$ $pH < \frac{1}{2}\,pK_e$=7 à 25°C.



Rappel de mathématiques

Pour tous réels positifs a et b, on a :

$\log (a.b) = \log a + \log b$

$\log (a/b) = \log a - \log b$

$\log a^b = b \log a$

$\log 10^b = b$

$\log 10 = 1$

$\log 1 = 0$

si : $\log a = b$, alors $b = 10^a$

212

II-pH d'une solution d'acide fort

Soit AH un acide fort de concentration initiale C : $AH + H_2O \longrightarrow A^- + H_3O^+$ (1)

$2\,H_2O \rightleftharpoons H_3O^+ + OH^-$ (2)

Equation chimique		AH	$+ H_2O \longrightarrow$	A^-	$+ H_3O^+$
Etat du système	Avancement volumique	Concentration ($mol.L^{-1}$)			
Etat initial	0	C	Excès	0	$10^{-\frac{pK_e}{2}}$
Etat final	y_f	$C - y_f$	Excès	y_f	10^{-pH}

$$[H_3O^+] = [H_3O^+]_{(1)} + [H_3O^+]_{(2)}$$

- **Approximation** : Pour des solutions acides vérifiant : **pH < 6** et **$C > 10^{-6}$ mol. L^{-1}**

<u>On néglige les ions provenant de l'ionisation propre de l'eau</u>

$$\Rightarrow [H_3O^+] \approx [H_3O^+]_{(1)}$$

- Pour un acide fort : $[H_3O^+] = y_f = \tau_f . y_{max}$ avec $\tau_f \approx 1$

$$[H_3O^+] = y_{max} = C \Rightarrow \boxed{pH = -\log C}$$

Remarque : Dans une solution, on peut négliger une entité chimique A devant une entité chimique B lorsque : $[A] \leq 5.10^{-2}.[B]$

III-pH d'une solution de base forte

Soit B une base forte de concentration initiale C :

$B + H_2O \longrightarrow BH^+ + OH^-$ (1)

L'ionisation propre de l'eau : $2\,H_2O$

Equation chimique		$B + H_2O \longrightarrow BH^+ + OH^-$			
Etat du système	Avancement volumique	Concentration ($mol.L^{-1}$)			
Etat initial	0	C	Excès	0	$10^{-\frac{pK_e}{2}}$
Etat final	y_f	$C - y_f$	Excès	y_f	10^{pH-pK_e}

$[OH^-] = [OH^-]_{(1)} + [OH^-]_{(2)}$

- **Approximation** : Pour des solutions basiques vérifiant : **pH > 8** et **C** > 10^{-6} **mol. L**$^{-1}$

On néglige les ions provenant de l'ionisation propre de l'eau

$\Rightarrow [OH^-] \approx [OH^-]_{(1)} = y_f$

2013

- Base forte : $[OH^-] = y_f = \tau_f . y_{max}$ avec $\tau_f \approx 1$

$$[OH^-] = y_{max} = C$$

$$[OH^-] = \frac{K_e}{[H_3O^+]} \Rightarrow [H_3O^+] = \frac{K_e}{[OH^-]} = \frac{K_e}{C}$$

$$-log[H_3O^+] = -logK_e + \log C$$

$$\boxed{pH = pK_e + logC} \quad , C = 10^{pH-pK_e}$$

IV-pH d'une solution d'acide faible

Soit AH un acide faible de concentration initiale C : $AH + H_2O \rightleftarrows A^- + H_3O^+$ (1)

$2 H_2O \rightleftarrows H_3O^+ + OH^-$ (2)

Equation chimique		$AH + H_2O \rightleftarrows A^- + H_3O^+$		
Etat du système	Avancement volumique	Concentration ($mol.L^{-1}$)		
Etat initial	0	C	Excès	0 $10^{-\frac{pK_e}{2}}$
Etat final	y_f	$C - y_f$	Excès	y_f 10^{-pH}

- **1ère approximation** : Pour des solutions acides de pH < 6 et C > 10^{-6} mol. L^{-1} on néglige les ions provenant de l'ionisation propre de l'eau devant ceux provenant de l'ionisation de l'acide

... $pH = -logy_f$

- **Loi d'action de masse :** $K_a = \frac{[A^-][H_3O^+]}{[AH]} = \frac{y_f^2}{C - y_f}$

$$y_f = \tau_f . y_{max} = \tau_f . C \Longrightarrow K_a = \frac{y_f^2}{C(1-\tau_f)}$$

- **2ème approximation :** Un acide faible est très faiblement ionisé, pour des solutions tel que $\tau_f < 0{,}05$, on a : $1-\tau_f \approx 1$

$$\Longrightarrow K_a = \frac{y_f^2}{C(1-\tau_f)} \approx \frac{y_f^2}{C} \Longrightarrow y_f = (C.K_a)^{1/2}$$

$$pH = -log y_f = -log\left[(C.K_a)^{1/2}\right]$$

$$\boxed{pH = \frac{1}{2}(pK_a - logC)} \quad ; \quad C = 10^{(-2pH+pKa)}$$

2014

V-pH d'une solution de base faible

Soit B une base faible de concentration initiale C :

$$B + H_2O \rightleftarrows BH^+ + OH^- \quad (1)$$

L'ionisation propre de l'eau :

$$2\,H_2O \longrightarrow H_3O^+ + OH^- \quad (2)$$

Equation chimique		B	+ H_2O	$\rightleftarrows BH^+$	+ OH^-
Etat du système	Avancement volumique	Concentration (mol.L⁻¹)			
initial	0	C	excès	0	$10^{\frac{pK_e}{2}}$
final	y_f	$C - y_f$	excès	y_f	10^{pH-pK_e}

- $1^{ère}$ **Approximation** : Pour des solutions basiques vérifiant : **pH > 8** et **C > 10^{-6} mol. L⁻¹**

<u>On néglige les ions provenant de l'ionisation propre de l'eau</u>

$$\Longrightarrow [OH^-] \approx [OH^-]_{(1)} = y_f$$

- Loi d'action de masse : $K_a = \frac{[B][H_3O^+]}{[BH^+]} = \frac{(C-y_f)[H_3O^+]}{y_f}$

$$y_f = \tau_f . y_{max} = \tau_f . C \Longrightarrow K_a = \frac{C(1-\tau_f)[H_3O^+]}{y_f}$$

à vérifier

- **2ème approximation :** Un ~~acide faible~~ Une base faible est très faiblement ionisé, pour des solutions tel que $\tau_f < 0{,}05$, on a : $1-\tau_f \approx 1$

$\Rightarrow$

$$K_a = \frac{C[H_3O^+]}{y_f} = \frac{C[H_3O^+]}{[OH^-]} = \frac{C[H_3O^+]^2}{K_e}$$

$$[H_3O^+]^2 = \frac{K_a.K_e}{C}$$

$$2\,pH = pK_A - \ log\,K_e + logC$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{pH = \frac{1}{2}\,(pK_A + \ pK_e + logC) \quad ; C = 10^{(2pH-pKe-pKa)}}$$

Conclusion

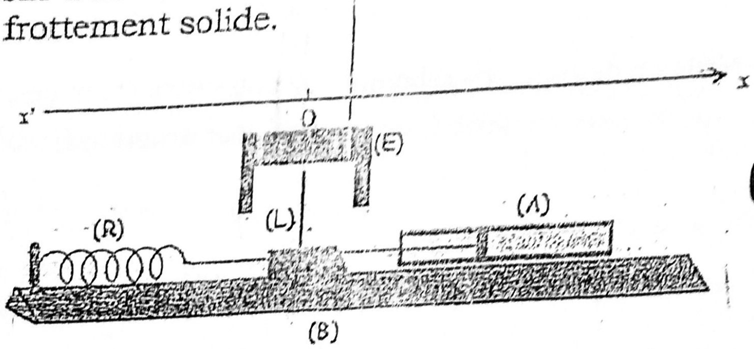
- Pour une solution d'acide ou de base, les relations suivantes permettent de calculer le pH si on connaît la concentration molaire C de la solution et réciproquement

Nature de la solution	Calcul du pH	Calcul de C ($mol.L^{-1}$)	Validité des expressions
Acide fort	$pH = -\log C$	$C = 10^{-pH}$	$pH < 6$
Base forte	$pH = pK_e + \log C$	$C = 10^{pH-pKe}$	$pH > 8$
Acide faible	$pH = \frac{1}{2}(pK_a - \log C)$	$C = 10^{pKa-2pH}$	$pH < 6$ pour les solutions acides faiblement ionisés.
Base faible	$pH = \frac{1}{2}(pK_a + pK_e + \log C)$	$C = 10^{2pH-pKe-pKa}$	$pH > 8$ pour les bases faiblement ionisées.

LES OSCILLATIONS MECANIQUES FORCEES

On réalise un dispositif permettant l'étude des oscillations forcées d'un oscillateur mécanique, à l'aide du matériel ci-dessous cité :

- un ressort (R) à spires non jointives, de masse négligeable et de raideur k ;
- un solide (S), de masse $m=200\ g$, et de centre d'inertie G, solidaire à une lame (L) en acier de masse négligeable ;
- un amortisseur (A) formé d'un piston, de masse négligeable, qui peut coulisser dans un cylindre fixe rempli d'un liquide. Son rôle est de soumettre le solide (S) à une force de frottement visqueux : $\vec{f}=-h\ \vec{v}$, avec h une constante positive et $\vec{v}$ le vecteur vitesse du centre d'inertie G du solide (S) ;
- un électro-aimant (E) excite la lame (L) avec une force $\vec{F}$ de la forme : $\vec{F}=F_m.\sin(\omega_e t)\ \vec{i}$, avec $\vec{i}$ un vecteur unitaire d'un axe x'x ayant la direction du mouvement de G et d'origine O projection de G lorsque le système est au repos ;
- un banc à coussin d'air horizontal qui sert de guide pour le solide (S) et qui élimine les forces de frottement solide.



216

1/-a)- Définir un oscillateur forcé.

b)- Dire pourquoi la force excitatrice est toujours en avance de phase sur l'élongation du résonateur?

c)- Entre l'excitateur (électro-aimant) et le résonateur (Ressort+Solide) il y a transfert d'énergie, dire dans quel sens ?

2/-a)- Etablir l'équation différentielle qui relie l'élongation x(t) de G, sa dérivée première $dx(t)/dt$, sa dérivée seconde $d^2x(t)/dt^2$ et F(t).

b)- Faire la représentation de Fresnel relative à l'équation établie dans a) dans le cas où sa solution est de la forme :

$$x(t)=X_m.\sin(\omega_e t-\pi/2)$$

c)- Déduire l'état d'oscillations de l'oscillateur.

d)- Montrer que dans ce cas la force de frottement $\vec{f}$ est à chaque instant opposée à la force excitatrice $\vec{F}$.

e)- Prouver que dans ce cas l'énergie mécanique du système (solide+ressort+Terre) se conserve.

3/- Pour différentes valeurs de ω_e, on mesure l'amplitude X_m des oscillations d'un point quelconque du solide (S) et on détermine la valeur V_m de la vitesse de passage de ce point par sa position d'équilibre.

Les variations de $X_m=f(\omega_e)$ et de $V_m=g(\omega_e)$ sont représentées par les graphes ci-dessous (les axes sont gradués en unités S.I):

a)- Lire la valeur ω_1 de la pulsation propre du résonateur et déduire la valeur de la constante de raideur k.

b)- Lire la valeur ω_2 de la ... d'élongation et dédu...
la valeur du coefficient ...

Corrigé : méca forcé ①

I°/ a) C'est un oscillateur dont les oscillations sont entretenues par un excitateur (moteur) qui impose la fréquence d'oscillation.

b) D'après le principe de causalité : « la cause précède tjrs l'effet » donc, $F(t)$ est tjrs en avance de phase sur $x(t)$.

Remarque : On peut aussi répondre par analogie :

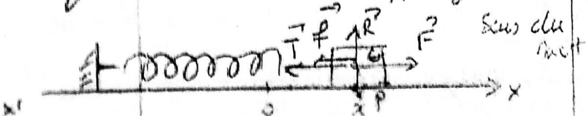
$0 < \varphi_U - \varphi_q < \pi \longleftrightarrow 0 < \varphi_F - \varphi_x < \pi$

d'où $\varphi_F > \varphi_x$

c°) le transfert d'énergie se fait de l'excitateur vers le résonateur.

2°) a) (Section Maths)

- syst : Solide (S)
- Fces : $\vec{P}, \vec{T}, \vec{R}, \vec{f}$ et $\vec{F}$
- référentiel terrestre supposé galiléen



- Théorème du centre d'inertie appliqué à (S) s'écrit : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{f} + \vec{T} + \vec{F} = m\vec{a}_G$

Proj° x'x : $T + f + F = m a_G$

$-kx - hv + F = m a_G$

d'où $\boxed{m\dfrac{d^2x}{dt^2} + h\dfrac{dx}{dt} + kx = F(t)}$

*(Section Sciences) : Par analogie électrique - mécanique :

$L\dfrac{d^2q}{dt^2} + R\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{1}{C}q = u(t)$

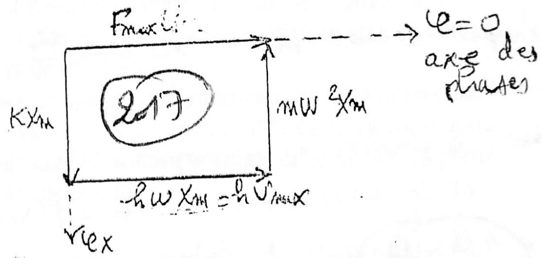
$\Updownarrow$

$\boxed{m\dfrac{d^2x}{dt^2} + h\dfrac{dx}{dt} + kx = F(t)}$

b) $x(t) = X_m \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$

$\Rightarrow$ les vecteurs de Fresnel seront :

$\begin{pmatrix} m\omega^2 X_m \\ \varphi_x + \pi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h\omega X_m \\ \varphi_x + \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} kX_m \\ \varphi_x = -\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_m \\ \varphi_U = 0 \end{pmatrix}$



c°) On a d'après Fresnel :

$\varphi_F = \varphi_V$: résonance de vitesse

(Par analogie avec $\varphi_U = \varphi_i$: résonance d'intensité)

d°) $F(t) = F_m \sin(\omega t + \varphi_F)$

avec $F_m = hV_{max}$ et $\varphi_F = \varphi_V$

donc : $F(t) = h\underbrace{V_{max}\sin(\omega t + \varphi_V)}_{V(t)}$

soit $\underline{F(t) = h\,V(t) = -f(t)}$

e°)

l'équ diff :

$m\dfrac{d^2x}{dt^2} + kx + hV(t) = F(t)$

$\Rightarrow m\dfrac{d^2x}{dt^2} + kx = \underbrace{F(t) - hV(t)}_{0}$

$\Leftrightarrow m\dfrac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$

C'est l'équ diff d'1 oscillateur libre non amorti : donc l'énergie totale

$E = $ cte

2

on trouve : $E = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2$

$$\frac{dE}{dt} = v\Big[\underbrace{kx + m\frac{d^2x}{dt^2}}_{F - hv = 0}\Big] \quad \text{donc } \frac{dE}{dt} = 0 \iff E = cte$$

3°/ a) On rappelle les expressions de X_m et de V_{max} :

$$X_m = \frac{F_m}{\sqrt{h^2\omega^2 + (m\omega^2 - k)^2}}$$

et $$V_m = \frac{F_m}{\sqrt{h^2 + \left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right)^2}}$$

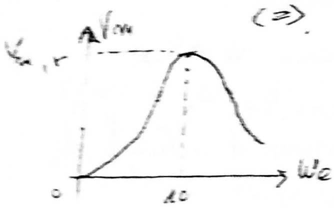
lorsque $\omega \to 0$ on a : $X_m \to \frac{F_m}{k}$

$V_m \to 0$

donc : la courbe (1) correspond à $V_{max} = g(\omega_e)$ et la courbe (2) à $X_m = f(\omega_e)$.

b)* A la résonance de vitesse, on a $\omega_e = \omega_0$

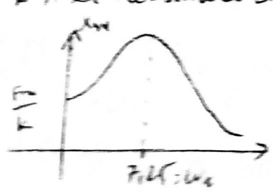
$\iff \omega_1 = \omega_0 = 10 \text{ rad s}^{-1}$



$\omega_1^2 = \omega_0^2 = \frac{k}{m}$

$\iff k = m\omega_1^2 = 20 \text{ N.m}^{-1}$

* A la résonance d'élongation : $\omega_e = \omega_2 = 7,25 \text{ rad s}^{-1}$



$\omega_2^2 = \omega_1^2 - \frac{h^2}{2m^2} \iff h^2 = (\omega_1^2 - \omega_2^2)2m^2$

$h = m\sqrt{2(\omega_1^2 - \omega_2^2)} = 1,95 \text{ kg s}^{-1}$

c) $X_{max2} = 0,046 \text{ m}$ d'après la figure (2)

$\Rightarrow \underbrace{\omega_2 X_{max2}}_{V_{max2}} = 7,25 \times 0,046 = 0,33 \text{ m s}^{-1}$

• $\omega_1 X_{max1} = V_{max1} = 0,4 \text{ m s}^{-1}$ (d'après fig 1)

d'où $\omega_1 X_{m1} = V_{max1} > \omega_2 X_{max2} = V_{max2}$

Qui ce résultat est prévisible car l'amplitude de la vitesse est max à la résonance de vitesse qui correspond à ω_1.

d) $X_m(0) = \frac{F_m}{k} = 0,04 \text{ m}$ (voir fig 2)

$\iff F_m = k X_m(0) = 0,8 \text{ N}$

e°) $P = \frac{1}{2} h V_{max}^2$

Pour $\omega = \omega_1$, V_{max} est maximale donc P est maximale (résonance de vitesse entraîne la résonance de puissance).

4°) $\omega_1 = \omega_0$: résonance de vitesse

$\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{h^2}{2m^2}}$: // d'élongation

$\Rightarrow$ pour avoir les deux résonances en même temps : $\omega_1 = \omega_2 \iff h = 0$.

or $$X_m = \frac{F_m}{\sqrt{h^2\omega^2 + (k - m\omega^2)^2}}$$

$\iff X_m \to \infty$ pour $h = 0$ et $\omega = \omega_1$

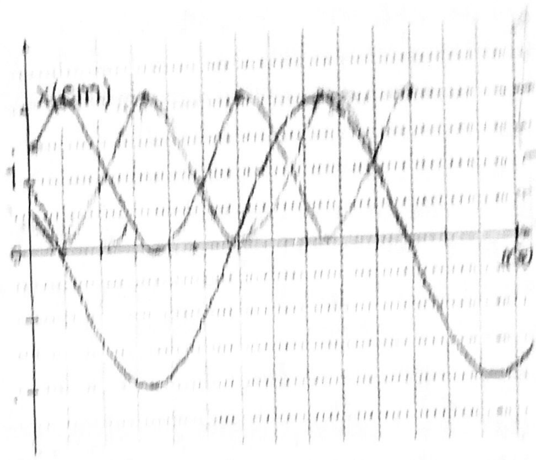
donc : Impossible car l'oscillateur sera détruit.

b°) On n'a plus de résonance d'élongation : réponse linéaire lorsque $h \geq \sqrt{2mk} = h_{limite}$

218

Série n°18- Oscillations mécaniques libres non amorties

Ex 1



Un oscillateur est formé d'un ressort horizontal de raideur $k=10N.m^{-1}$ et d'un solide (S) de centre d'inertie G et de masse m=100g, glisse sans frottement sur un plan horizontal.

1-Montrer que le mouvement de G est rectiligne sinusoïdal.

2-On écarte G de sa position d'équilibre de x_0 et on lance avec une vitesse V_0. la courbe ci-contre donne l'évolution de l'élongation x en fonction du temps. Déterminer la loi horaire de x(t) et celle de v(t).

3-Déterminer les expressions en fonction du temps de l'énergie cinétique E_c du centre d'inertie G et celle de l'énergie potentielle élastique E_p.

4-Représenter sur le même graphe $E_p(t)$ et $E_c(t)$.

5-Dans une autre expérience, on écarte le solide (S) de 2,83cm dans le sens positif et on le lâche avec une vitesse initiale v_i dans le sens négatif. L'énergie mécanique E_m du système vaut 8mJ. Ecrire l'équation horaire de x(t) et calculer la valeur de la vitesse v_i.

(257)

Ex2 : Contrôle 2010

On dispose d'un pendule élastique horizontal comportant un ressort (ℜ) et un solide (S) de masse m. L'une des extremités de (ℜ) est fixe tandis que l'autre extrémité est attachée à (S), comme le montre la figure ci-dessus. Le solide (S) est susceptible de glisser sur un plan horizontal, dans le repère galiléen (O, i) confondu avec l'axe du ressort et dont l'origine O est la position de repos du centre d'inertie G de (S). Le ressort (ℜ) a une raideur **k** et une masse négligeable devant celle de (S)

On écarte le solide **(S)** de sa position de repos O en le déplaçant suivant l'axe **x'x**, de manière à ce que le ressort (ℜ) se comprime d'une longueur **a**. A l'instant **t = 0 s**, on l'abandonne à lui-même, sans vitesse initiale.

Avec un dispositif approprié, on enregistre dans le repère (O, i) le diagramme de mouvement du centre d'inertie **G** de **(S)**. Ainsi, on obtient l'une des courbes sinusoïdales de **la figure 1**

1) a- De telles oscillations de (S) sont dites libres. Justifier cette qualification.

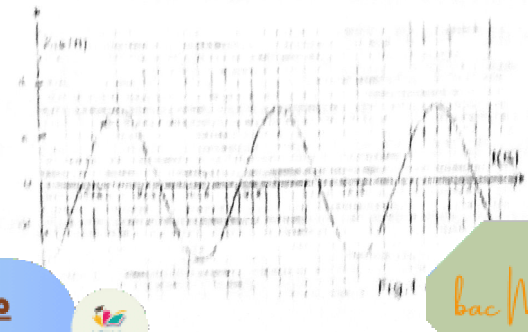
b- Montrer que ces oscillations sont non amorties

2) a- Calculer la phase initiale φ des oscillations de (S) et en déduire que c'est la courbe 2 qui représente le diagramme du mouvement de (S).

b- Montrer que l'amplitude des oscillations est égale à la longueur **a** dont on a comprimé initialement le ressort

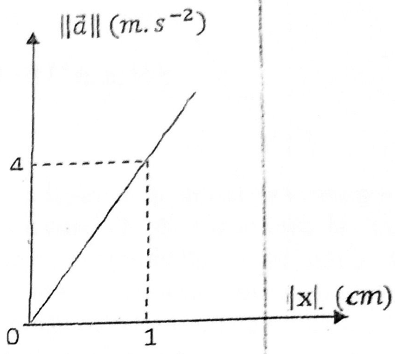
- Déterminer graphiquement la valeur de l'amplitude a et celle de la période T_0 des oscillations

c- Calculer la valeur de la raideur k du ressort sachant que m = **289 g**



Ex 3

Un pendule élastique est constitué d'un solide (S) de masse m et d'un ressort de raideur K=80 N. m^{-1} et de masse négligeable devant celle de (S). Le solide de centre d'inertie G se déplace sans frottement sur un plan horizontal. On désigne par x l'abscisse du centre d'inertie G du solide et par v sa vitesse à un instant t.



1-Sachant qu'il ya conservation de l'énergie mécanique E_m du système, en déduire l'équation différentielle des oscillations de G.

2-La courbe suivante traduit l'évolution de la valeur absolue de l'accélération $\vec{a}$ du centre d'inertie G du solide en fonction de la valeur absolue de son élongation x.

a) Justifier l'allure de cette courbe.

b) En déduire la valeur de la pulsation propre de l'oscillateur et celle de la masse m du solide.

258

3- On donne : $x(t)= 2.5\sin(\omega_0 t + \frac{\pi}{2})$ avec x en cm.

a) Calculer la valeur de l'énergie mécanique E_m du système (solide-ressort).

b) Déterminer la valeur de l'énergie cinétique du solide lors de son passage par le point d'abscisse $x=1{,}25.\sqrt{2}$ cm. Comparer cette valeur à celle de E_m.

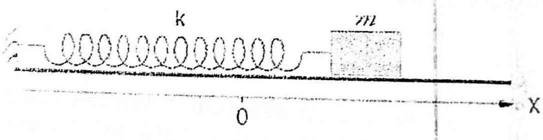
c) Déterminer la date de passage de G par la position d'abscisse x=1,25 cm pour la première fois à partir de t=0s.

4- Montrer que la valeur de la vitesse v, l'élongation x et l'amplitude X_m vérifiant la relation :

$$x^2 + \frac{v^2}{\omega_0^2} = X_m^2.$$

Ex4

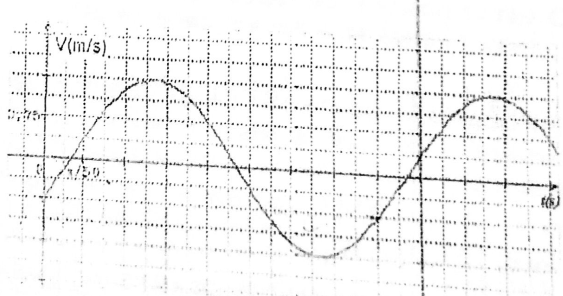
Un pendule élastique horizontal formé d'un solide (S) De masse m, et d'un ressort à spires non jointives, de Masse négligeable devant m et de raideur k.



Le pendule oscille librement sans amortissement autour de sa position d'équilibre, repérée par le point O origine du repère (O,$\vec{i}$) , $\vec{i}$ est le vecteur unitaire de direction l'axe du ressort.

1-a)Que doit-on utiliser pour que les forces d'amortissement soient négligeables devant la force de rappel ?

b-Par une étude dynamique établir l'équation différentielle du mouvement du centre d'inertie G du solide en fonction de l'élongation x(t).



2- Les variations de la vitesse v de G en fonction du temps sont données par le graphe ci-contre :

a)D'après le graphe le système (Solide –ressort) est-il conservatif ?

b) A l'instant t=0, le ressort est-il allongé ou comprimé ?

c) Donner la valeur algébrique de la vitesse à t=0.

d) Déterminer graphiquement la valeur de la phase de x(t).

3- Les variations de l'énergie cinétique du solide (S) en fonction du temps sont décrites par le graphe suivant :

Déterminer les valeurs de :

a) La période propre T_0.

b) La masse m et la constante de raideur k du ressort.

c) Représenter $E_{pe}(t)$ sur le même système d'axe de la figure 2.

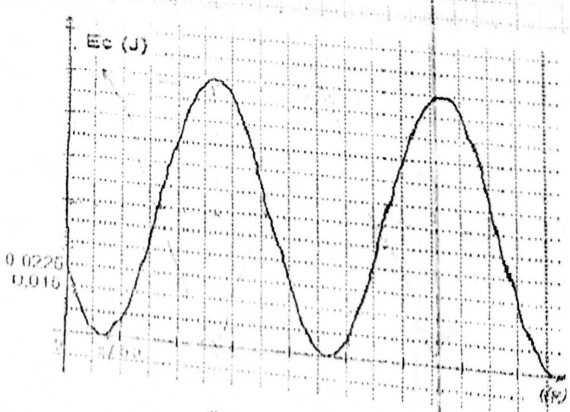
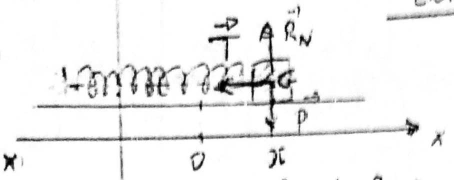


Fig 2

d) Déterminer les valeurs de x pour $E_c = Ep_e$ ainsi que les dates correspondantes.

Corrigé série 18



syst : solide (s) ; référentiel : terrestre supposé galiléen

Forces : $\vec{P}$, $\vec{R}_N$ et $\vec{T}$

R.F.D appliquée à (S) : $\vec{P}+\vec{R}_N+\vec{T}=m\vec{a}$

proj suivant x'x : $-\|\vec{T}\| = ma$

$-Kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$

$\Leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$ avec $\omega_0^2 = \frac{K}{m}$

equation différentielle qui admet pour solution : $x(t) = x_m \sin(\omega_0 t + \varphi_x)$

$\Leftrightarrow$ il s'agit d'un mvt rectiligne sinusoïdal.

2/ $x(t) = x_m \sin(\omega_0 t + \varphi_x)$?

$x_m = 2.10^{-2} m$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} = 10\, rad\, s^{-1}$

$x(0) = x_m \sin\varphi_x = \frac{x_m}{2} \Leftrightarrow \sin\varphi_x = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \varphi_x = \frac{\pi}{6}$ ou $\varphi_x = 5\frac{\pi}{6}$

or $\frac{dx}{dt} < 0 \Leftrightarrow \cos\varphi_x < 0 \Leftrightarrow \varphi_x = \frac{5\pi}{6}$ rad

soit $\boxed{x(t) = 2.10^{-2}\sin\left(10t + \frac{5\pi}{6}\right)}$ en m.

* $v(t) = V_m \sin(\omega_0 t + \varphi_v)$ avec

259

$\varphi_v = \varphi_x + \frac{\pi}{2} = \frac{4\pi}{3}$ rad

$V_m = \omega_0 x_m = 10 . 2.10^{-2} = 0{,}2\, m\, s^{-1}$

$\Leftrightarrow \boxed{v(t) = 0{,}2 \sin\left(10t + \frac{4\pi}{3}\right)}$ en $m.s^{-1}$

3/ $E_{pe} = \frac{1}{2}Kx^2 = \frac{1}{2}K\, x_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_x)$

$= 2.10^{-3}\sin^2\left(10t + \frac{5\pi}{6}\right)$

ssi : $E_{pe} = \frac{1}{4}K x_m^2\left[1 - \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_x)\right]$

$= 10^{-3}\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{5\pi}{3}\right)\right]$

avec $T = \frac{T_0}{2}$

* $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\, v_m^2 \ldots$

$E_c(t) = 10^{-3}\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + 2\varphi_v\right)\right]$

$E_c(t) = 10^{-3}\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + 8\frac{\pi}{3}\right)\right]$

4/ * $E_{pe} = 10^{-3}\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{5\pi}{3}\right)\right]$

à $t=0$: $E_{pe} = 10^{-3}\left[1 - \cos\frac{5\pi}{3}\right] = 0{,}5.10^{-3} J$

$t = \frac{T}{6}$: $E_{pe} = 0\, J$

$t = \frac{2T}{6}$: $E_{pe} = 0{,}5.10^{-3} J$; $t = \frac{3T}{6}$: $E_{pe} = 1{,}5.10^{-3}$

$t = \frac{4T}{6}$ on a : $E_{pe} = 2.10^{-3} J$

(E_c est en opposition de phase avec $E_{pe}(t)$)

et tq $E_c + E_p = cte = 2.10^{-3} J$

5/ $x(t) = X_m \sin(\omega_0 t + \varphi_x)$?

$\omega = 10\, rad\, s^{-1}$

$x(0) = X_m \sin\varphi_x = 2{,}82$ cm

$\Rightarrow \sin\varphi_x = \frac{2{,}82\, cm}{X_m}$

avec : $E_m = \frac{1}{2}K X_m^2 = cte$

$\Leftrightarrow X_m = \sqrt{\frac{2E_m}{K}} = 4.10^{-2} m$

soit $\sin\varphi_x = \frac{2{,}82\, cm}{4\, cm} = 0{,}707$

de plus $\cos\varphi_x < 0$ (car $v_1 < 0$)

d'où $\varphi_x = \frac{3\pi}{4}$ rad

$\Rightarrow x(t) = 4 . 10^{-2}\sin\left(10t + \frac{3\pi}{4}\right)$ en m

* v_1 ? $v_1 = v(t=0) = \omega_0 X_m \cos\varphi_x$

$= 10 . 4.10^{-2}\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

$v_1 = -0{,}28\, m\, s^{-1} < 0$

$\|\vec{v}_1\| = 0{,}28\, m\, s^{-1}$

Ex 2 :

1°/a) Les oscillations décrites sont dites libres parce qu'elles sont produites sans que le solide (S) soit soumis à des excitations.

b) Le diagramme du mvt de (S) est une sinusoïde, ce qui traduit des oscillations d'amplitude constante. Donc les oscillations sont non amorties.

2°/a) $x(t) = X_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$

et $v(t) = \omega_0 X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$

$v(0) = \omega_0 X_m \cos\varphi = 0 \Leftrightarrow \cos\varphi = 0$

$\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ rad.

260

à $t=0$: $x = X_m \sin\varphi = -a$

$\Rightarrow \sin\varphi < 0 \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2}$ rad.

• à $t=0$: $x(0) < 0$ qui correspond à la courbe (2).

b) $x(0) = X_m \sin\varphi = -a$

$X_m = \frac{-a}{\sin\varphi} = \frac{-a}{-1} = a$

• d'après la courbe (2) :

$a = 3\,cm$, $T_0 = 0,6\,s$.

c) $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} \Leftrightarrow K = \frac{4\pi^2 m}{T_0^2} = 31,7\ N.m^{-1}$

Ex 3

1°/ $E_m = \frac{1}{2}Kx^2 + \frac{1}{2}mv^2$

$\frac{dE_m}{dt} = 0 \Leftrightarrow Kx.v + mv\frac{d^2x}{dt^2} = 0$

$v\left[Kx + m\frac{d^2x}{dt^2}\right] = 0\ \forall t$

si $v \neq 0 \Leftrightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} + Kx = 0$

$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0}$ avec $\omega_0^2 = \frac{K}{m}$

2°/a) D'après l'équation différentielle on a :

$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x$

$\Leftrightarrow \|\vec{a}\| = \omega_0^2 |x|$

d'où : $\|\vec{a}\| = f(|x|)$ est une droite linéaire croissante de coeff directeur $= \omega_0^2$.

• $\omega_0^2 = \frac{4}{10^{-2}} = 400\ (rad\,s^{-1})^2$

soit $\omega_0 = 20\ rad\,s^{-1}$

$m = \frac{K}{\omega_0^2} = 0,2\ kg$.

3°/a) $E_m = cte$ en particulier lorsque

$x = \pm X_m$, $v = 0$

$\Rightarrow E_m = \frac{1}{2}K X_m^2 = 25.10^{-3}\ J$

b) $x = 1,25\sqrt{2}.10^{-2}\ m$

$\Rightarrow E_c = \frac{1}{2}mV^2 = E_m - E_p$

$E_c = \frac{1}{2}KX_m^2 - \frac{1}{2}Kx^2$

$E_c = \frac{1}{2}K(X_m^2 - x^2) = 12,5.10^{-3}\ J$

$\boxed{E_c = \frac{E_m}{2}}$

c) $x(t) = 2,5.\sin(\omega_0 t + \frac{\pi}{2})$ en cm

$x = 1,25\ cm$

$\Leftrightarrow \sin(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \omega_0 t + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \omega_0 t + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \omega_0 t = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \omega_0 t = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} t = \frac{-\pi/3}{2\pi/T_0} + kT_0 = \frac{-T_0}{6} + kT_0 \\ t = \frac{T_0}{6} + kT_0 \end{cases}$

Pour la 1ère fois : $t = \frac{T_0}{6} = \frac{2\pi}{6\omega_0} = \frac{2\pi}{6 \times 20} =$

corrigé Bac 18

c°) $x^2 = X_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_x)$

$\left(\frac{v}{\omega_0}\right)^2 = X_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_x)$

$x^2 + \left(\frac{v}{\omega_0}\right)^2 = X_m^2 [\underbrace{\cos^2(\ ) + \sin^2(\ )}_{1}]$

soit : $\boxed{x^2 + \left(\frac{v}{\omega_0}\right)^2 = X_m^2}$

d) φ_x ?

$\varphi_x = \varphi_v - \frac{\pi}{2}$, φ_v ? $v(0) = V_m \sin\varphi_v = -\frac{V_m}{2}$

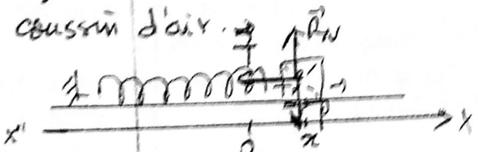
$\Rightarrow \sin\varphi_v = -\frac{1}{2}$, $\cos\varphi_v > 0$

donc $\varphi_v = -\frac{\pi}{6}$ rad

$\Rightarrow \varphi_x = -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = -\frac{2\pi}{3}$ rad.

Ex4 : 1°) On doit utiliser un banc à coussin d'air.

2°)



RFD appliqué au solide (S) ds le référentiel terrestre supposé galiléen :

$\vec{P} + \vec{T} + \vec{R_N} = m\vec{a}$

proj $\vec{x'x}$: $-\|\vec{T}\| = ma$

$-Kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$

$\Leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$ avec $\omega_0^2 = \frac{K}{m}$

261

2°/a) L'amplitude des oscillations V_{max} est constante $\Rightarrow$ syst conservatif

en effet : $V_{max} = \omega_0 X_m$

$X_m = \frac{V_{max}}{\omega_0} = cte$.

b°) ma :

$ma + Kx = 0 \Rightarrow x = -\frac{m}{K}a$

$x = -\frac{m}{K}\left(\frac{dv}{dt}\right)$

or d'après le graphe, $v(t)$ croît au voisinage de $t=0 \Rightarrow \frac{dv}{dt}(0) > 0$

d'où $x(0) = -\frac{m}{K}\left(\frac{dv}{dt}(0)\right) < 0$

donc : à $t=0$, le ressort est comprimé

c) D'après le graphe :

$v(0) = -0{,}H\ m.s^{-1}$

3°/ a°) D'après le graphe $E_c = f(t)$,

$T_{E_c} = \frac{4\pi}{50} = \frac{8\pi}{100} = 0{,}08\pi$ s

$T_0 = 2T_{E_c} = 0{,}16\pi$ s

b°) $E_{c_{max}} = \frac{1}{2} m V_{max}^2$

$\Leftrightarrow m = \frac{2E_{c_{max}}}{V_{max}^2} = \frac{2 \cdot 0{,}09}{(1{,}5)^2} = 0{,}08$ kg

K ? $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$

$T_0^2 = \frac{4\pi^2 m}{K} \Rightarrow K = \frac{4\pi^2 m}{T_0^2}$

$K = \frac{4\pi^2 \cdot 0{,}08}{(0{,}16)^2 \cdot \pi^2} = 12{,}5$ N m^{-1}

c) $E_p(t) = E - E_c(t)$ avec $E_{c_{max}} = 0{,}09$ J

voir courbe

$E = E_c + E_{pe}$

$E_c = E_{pe} \Leftrightarrow E_{pe} = \frac{1}{2}E = \frac{1}{2}E_{c_{max}}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}Kx^2 = \frac{1}{2}E_{c_{max}}$

$\Rightarrow x^2 = \frac{E_{c_{max}}}{K} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{E_{c_{max}}}{K}}$

$x = \pm\sqrt{\frac{0{,}09}{12{,}5}} = \pm 8{,}48$ cm

$E_c = E_{pe}$ lorsque $E_c = \frac{1}{2}E_{c_{max}} = 0{,}045$ J

$E_c = E_{pe}$ pour la 1ère fois à la date $t_1 = 3{,}33$ div $= 3{,}33 \cdot \frac{\pi}{100} = 0{,}104$ s

d'où : $E_c = E_{pe}$ aux instants

$t = t_1 + n\frac{T}{2}$ avec $n \in \mathbb{N}$

Série n°19-Oscillations mécaniques libres amorties

Ex1

Le pendule élastique horizontal de la figure -1- est constitué par un solide (S) de masse m=0,2 kg soudé à l'une des extrémités d'un ressort (R) à spires non jointives de masse négligeable et de constante de raideur $k=20\ N.m^{-1}$, l'autre extrémité est attachée à un support fixe. A l'équilibre, le centre d'inertie G du solide (S) coïncide avec l'origine O d'un repère espace horizontal. L'oscillateur est soumis à des forces de frottement visqueux équivalentes à une force unique $\vec{f} = -h.\vec{v}$ avec $h=0,1\ kg.s^{-1}$

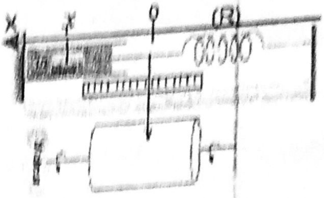


Fig.1

1-a)Justifier le fait que h s'exprime dans S.I en $kg.s^{-1}$ ou bien en $N.m^{-1}.s^{-1}$.

b) Etablir l'équation différentielle vérifiée par l'élongation x des oscillations.

2-A l'ide d'un dispositif approprié, on a enregistré le diagramme de la variation de la vitesse v en fonction du temps (Figure-2-).

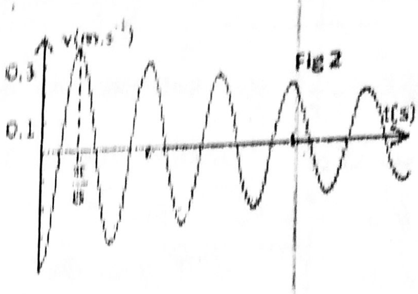


Fig 2

a) Quel est le nom du régime d'oscillations obtenu ?

b) Montrer que l'énergie totale du système (solide – ressort) diminue au cours du temps. Expliquer la non conservation de cette énergie.

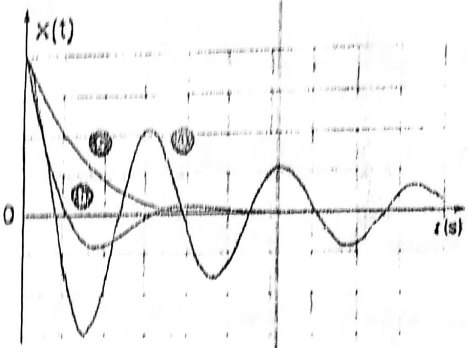
c) Calculer la variation de l'énergie du système entre les instants de dates $t_1 = \frac{3\pi}{8}$ s et $t_2 = \frac{7\pi}{8}$ s.

3-Dans une autre expérience, la masse m du solide est égale à 0,5 kg, et en utilisant un ressort (R'), l'équation différentielle du mouvement en fonction de x s'écrit :

$$2\frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{dx}{dt} + 200x = 0.$$

Déterminer la valeur de la de la constante de raideur k' du ressort ainsi que la nouvelle valeur de h.

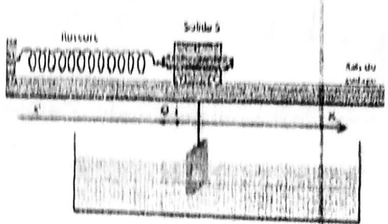
4- En modifiant les conditions initiales et en donnant à h successivement différentes valeurs (h_a, h_b et h_c) , on obtient les diagrammes de x(t) suivants.



Nommer les régimes correspondants à chaque diagramme et classer par ordre croissant h_a, h_b et h_c.

Ex 2

Un ressort (R) de constante de raideur $k=20\ N.m^{-1}$ est fixé par son extrémité libre à un solide ponctuel (S) de masse m. Au cours des oscillations, (S) est soumis à une force de frottement $\vec{f} = -h.\vec{v}$. A l'aide d'un cylindre enregistreur, on obtient la courbe ci-dessous représentant l'élongation x(t) .On confondra la pseudo-période T à la période propre T_0.



1-A partir du diagramme, préciser la valeur de la vitesse v à la date t_2.

2-a)Entre t_1 et t_2, la vitesse de (S) est-elle positive ou négative ? Justifier.

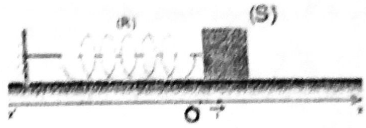
b) Indiquer si à ces instants la valeur de la vitesse est-elle maximale ou non ?

262

3-a) Sous quelle (s) forme (s) se trouve l'énergie emmagasinée par l'oscillateur aux instants t_1 et t_2.

b) Calculer la valeur de l'énergie mécanique E_m à la date t_2.

Ex 3



Un solide (S) de masse m=250 g de centre d'inertie G est fixé à un ressort de raideur $k=10N.m^{-1}$ et de masse négligeable comparée à m. Le solide est soumis au cours de son mouvement à une force de frottement de type visqueux $\vec{f} = -h.\vec{v}$, est écarté à partir de sa position d'équilibre de 4 cm dans le sens positif et lâché à l'origine des dates sans vitesse initiale. Un système approprié permet de tracer en fonction du temps de l'élongation x(t) (voir fig1), de l'énergie cinétique $E_c(t)$, l'énergie potentielle élastique $E_{pe}(t)$ et de l'énergie mécanique E_m (fig2).

1-Quelle est la différence entre la force de frottement visqueux et celle de frottement solide ?

2-a) Déterminer la pseudo-période T et la comparer à la période propre T_0.

b) De telles oscillations sont-elles faiblement amorties ?

3-a)Etablir l'équation différentielle du mouvement en fonction de l'élongation x.

b) Déduire la relation suivante : $\frac{dE_m}{dt} = f.v$. Conclure.

c) Attribuer en justifiant les courbes (1), (2) et (3) aux fonctions $E_c(t)$, $E_{pe}(t)$ et $E_m(t)$.

4-a) Justifier la forme en escalier de la courbe $E_m(t)$.

b) Calculer l'énergie perdue par l'oscillateur pendant la première pseudo-période.

263

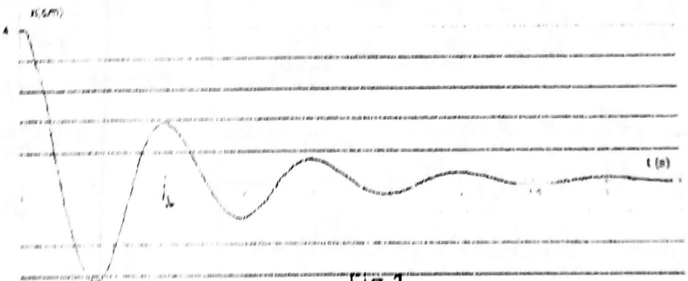


Fig.1

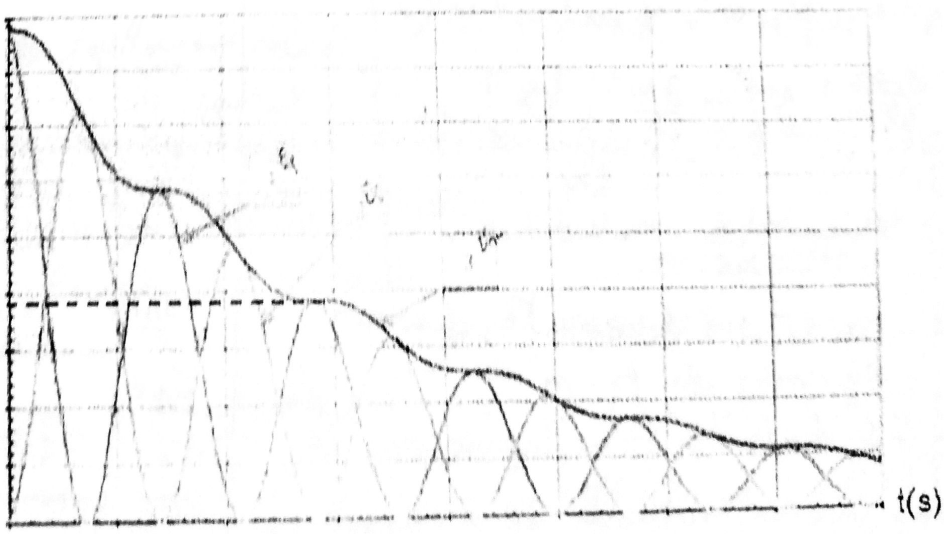


Fig.2

Corrigé série 13

Ex 1 :

1°/ a) • $f = -hv$ ou $h = -\frac{f}{v}$

h est exprimé en $\frac{N}{m\,s^{-1}}$ ou $N\,m^{-1}.s$

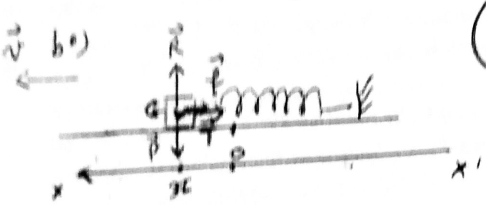
• $\Sigma F_{ext} = m\vec{a}$ donc : $f = ma$

$-hv = ma \Leftrightarrow h = \frac{ma}{v}$

h en $kg.s^{-1}$

264

b°)



syst : solide (S)

Bilan des forces : $\vec{P}, \vec{T}, \vec{R}$ et $\vec{f}$

référentiel : Terrestre supposé galiléen

2e loi de Newton appliquée à (S) :

$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} + \vec{f} = m\vec{a}$

proj $x'x$: $T + f = ma$

$-kx - hv = m\frac{d^2x}{dt^2}$

$\Rightarrow \boxed{m\frac{d^2x}{dt^2} + h\frac{dx}{dt} + kx = 0}$

2°/ a) Régime pseudo-périodique.

b) $E = E_c + E_p$

$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$

$\frac{dE}{dt} = v\Big[\underbrace{m\frac{d^2x}{dt^2} + kx}_{-hv}\Big]$

donc $\frac{dE}{dt} = -hv^2 \leq 0$

E est décroissante, diminue au cours du temps.

• Cette diminution est expliquée par la transformation mutuelle de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle élastique d'une manière non intégrale à cause des forces de frottement visqueux qui di[...] sous forme [...]

c) $\Delta E = E(t_2) - E(t_1)$

• $t_1 = \frac{3\pi}{8}$ s : $v = V_{max} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = a = 0$

d'où l'équ diff sera :

$0 + hV_{max} + kx = 0$

$\Rightarrow x = -\frac{h}{k}V_{max}$

AN : $x = -\frac{0,1 \cdot 0,3}{20} = -1,5.10^{-3}$

$\Rightarrow E(t_1) = E_{c_1} + E_{p_{e_1}} = \frac{1}{2}mV_{max}^2 + \frac{1}{2}kx^2$

$= \frac{1}{2} \cdot 0,2 \cdot (0,3)^2 + \frac{1}{2} \cdot 20\,(1,5.10^{-3})^2$

$\underline{E(t_1) = 9,02.10^{-3}\,J}$

• $t_2 = \frac{7\pi}{8}$ s : $V = V_{max} = 0,2\,m\,s^{-1}$

de même : $x = -\frac{h}{k} \cdot V_{max} = -10^{-3}$

soit : $E(t_2) = E_{c_2} + E_{p_{e_2}} = \underline{4,01.10^{-3}\,J}$

on a donc : $\Delta E = \underline{-5,01.10^{-3}\,J}$

3°/ L'équation différentielle en x :

$m\frac{d^2x}{dt^2} + h\frac{dx}{dt} + k'x = 0$

or $m = 0,5$ kg

$\Rightarrow 0,5 \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + h\frac{dx}{dt} + k'x = 0$

de plus : $2 \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{dx}{dt} + 200x = 0$

$\Rightarrow h = 2\,kg.s^{-1}$ et $k' = 50\,N.m^{-1}$.

4°/ • courbes (a) et (b) : régime pseudo-périodique

• courbe (c) : régime apériodique.

si $h \uparrow$ alors l'amortissement augmente

soit : $h_a < h_b < h_c$

Ex 2 :

1°/ à t_2 on a : $x = -X_m \Rightarrow v = \frac{dx}{dt} = 0$

2°/a/ Entre t_1 et t_2 : x est décroissante

$\Leftrightarrow \frac{dx}{dt} < 0$, soit $v < 0$.

b°) * à t_2, on a montré dans la question 1°/ que $v=0 \Leftrightarrow v$ n'est pas maximale.

* à t_1, $x=0$, comme E ne se conserve pas donc v n'est pas maximale.

En effet : pour $v = V_{max}$, $a = \frac{dv}{dt} = 0$.

$\Rightarrow$ l'équ diff donne :

$$0 + hV_{max} + kx = 0$$

$$\Rightarrow x = -\frac{h}{k} V_{max} \neq 0$$

or $x=0$ donc $v \neq V_{max}$

265

3°/a) * à t_1, $x=0 \Leftrightarrow E_{pe}=0$

$$E_m = E_c + \underbrace{E_{pe}}_{0} = E_c$$

L'énergie est purement cinétique

* à t_2, $x = -X_m$ et $v = \frac{dx}{dt} = 0$

$\Rightarrow E_c = 0$ d'où $E_m = E_{pe}$: énergie potentielle élastique.

b°) $E_m = E_{pe} = \frac{1}{2}kx^2$

$x = -X_m = -2$ cm

$\Rightarrow E = \frac{1}{2}(20)(-2.10^{-2})^2 = 4.10^{-3}$ J.

Ex3 :

1°/ La valeur de la force de frottement solide dépend de la nature du plan de contact avec le solide uniquement. Tandis que la valeur de la force de frottement visqueux dépend de la nature du fluide (gaz ou liquide) et de la vitesse du solide.

2°/a) D'après la fig 1, $T = 1$ s

$$T_0 = 2\pi\sqrt{m/k} = 0{,}99 \text{ s} \simeq 1 \text{ s}$$

d'où $T \simeq T_0$

b) $T \simeq T_0$, donc on peut dire que les oscillations sont faiblement amorties (car sinon, on aura ...

3°/a)

syst : solide (S), Forces : $\vec{P}$, $\vec{T}$, $\vec{f}$ et $\vec{R}$

référentiel : Terrestre supposé galiléen.

2ème loi de Newton : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} + \vec{f} = m\vec{a}$

proj $x'x$: $-kx - hv = m\frac{d^2x}{dt^2}$

d'où $$m\frac{d^2x}{dt^2} + h\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

b°) $E_m = E_c + E_{pe} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$

$$\frac{dE_m}{dt} = v\underbrace{\left(m\frac{d^2x}{dt^2} + kx\right)}_{-hv} = -hv^2$$

d'où $\frac{dE_m}{dt} = f.v$ avec $f = -hv$

* la variation par unité de temps de l'énergie mécanique du syst (solide-r) est égale au travail de la force de frottement visqueux :

$$dE_m = f.v.dt = \underbrace{f.dl}_{W(\vec{f})}$$

c°) à $t=0$, on a $x = X_m$

$\Rightarrow v = \frac{dx}{dt} = 0 \Leftrightarrow E_c = 0$.

d'où :
- courbe (1) correspond à $E_{pe}(t)$.
- courbe (2) correspond à $E_c(t)$.
- courbe (3) correspond à $E_m(t) = E_c(t)$

4°/a) Lorsque $x = X_m$, $E_{pe} = E_{pe\,max}$ et $v=0$ car $v = \frac{dx}{dt}$

or $\frac{dE_m}{dt} = -hv^2 \Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = 0$

d'où on a une tangente horizontale

b°) $W_{0\to T} = |\Delta E| = E_m(t=0) - E_m(t=T)$

$= \frac{1}{2}kX_m^2(0) - \frac{1}{2}kX_m^2(T)$

$= \frac{1}{2}k[X_m^2(0) - X_m^2(T)]$

$= \frac{1}{2}.10[(4.10^{-2})^2 - (1{,}6.10^{-2})^2]$

$W_{0\to T} = 6{,}72.10^{-3}$ J

Série n°20- pH des solutions aqueuses

Ex1

1-Donner l'expression du pH en fonction de la concentration initiale C, en précisant les approximations utilisées dans chacun des cas suivants : acide fort, acide faible, base forte et base faible.

2-Déduire l'allure de la courbe de dilution : pH= f (-log C), pour chaque type de solution précédente.

Ex2

On étudie la variation du pH d'une solution aqueuse d'un acide AH en fonction de sa concentration molaire C.

1-Sachant que AH est un acide faible, écrire l'équation de son ionisation dans l'eau.

2-a)Le pH d'une solution S_0 de concentration C_0=0,1mol.L^{-1} de cet acide est égal à 2,4. Dresser le tableau descriptif d'évolution et calculer le taux final d'avancement τ_{f0}.

b) L'acide AH est-il faiblement ionisé dans ces conditions ? Justifier.

c)Déduire le pKa du couple AH/A$^-$.

3-On se propose de diluer 1000 fois la solution S_0 afin d'obtenir une solution S_1. On dispose du matériel suivant : Pipettes jaugées : 5 mL, 10 mL, 1 mL. Fioles jaugées : 50 mL, 1000 mL, 25 mL. Choisir le matériel nécessaire et proposer le protocole expérimental permettant de préparer S_1.

4-Calculer le pH de la solution S_1.

Ex3

On dissout 448 ml de gaz ammoniac NH_3 dans 200 ml d'eau. On obtient une solution de pH=11,1.

1-Dresser le tableau descriptif d'évolution du système. On donne le volume molaire V_m=22,4 L. mol^{-1}.

2-Calculer le taux d'avancement final de la réaction d'ionisation de l'ammoniac dans l'eau.

3-Peut-on considérer que l'ammoniac est faiblement ionisé dans l'eau ? Justifier.

4-Calculer le pKa du couple NH_4^+ /NH_3.

5-Sachant que la réaction de l'ammoniac avec l'eau est exothermique, indiquer en justifiant la réponse s. le pH de la solution varie-t-il par:

a)Ajout d'une faible quantité d'eau.

b) Diminution de la température.

266

Ex4

Toutes les solutions sont prises à 25°C, le produit ionique de l'eau est K_e=10^{-14}.

En dissolvant chacune des trois bases B_1, B_2, et B_3 dans de l'eau pure, on prépare respectivement trois solutions aqueuses basiques (S_1), (S_2) et (S_3) de concentrations initiales identiques C_1=C_2=C_3.

On oublie de coller une étiquette portant le nom de la solution sur chaque flacon. Seule l'une des bases correspond à une base forte (l'hydroxyde de potassium NaOH). Chacune des deux autres solutions sont des bases faibles. Pour identifier chacune des solutions, on mesure son pH et on porte les résultats dans le tableau suivant :

	(S_1)	(S_2)	(S_3)
pH	11,1	13	10,6

1-a)Classer les bases B_1, B_2, et B_3 par ordre de force croissante.

b) En déduire la base qui correspond à NaOH, et déterminer la valeur de la concentration de la solution.

2-En justifiant les approximations utilisées, exprimer le pH d'une solution de base faible B.

3- Identifier chacune des deux bases faibles à partir de la liste donnée dans le tableau ci-cor

	Aziridrine	Morphine	Ammoniac	Ephédrine	Ethylamine
pKa	8,08	8,21	9,25	9,96	10,7

Ex5

On dispose de deux solutions :

*(S_A) ; solution aqueuse d'acide méthanoïque HCOOH de concentration molaire C_A=0,1mol.L^{-1}.

*(S_B) : solution aqueuse de méthanoate de sodium NaHCOO de concentration molaire C_B= C_A.

On réalise six mélanges de V_A mL de (S_A) et V_B mL de (S_B) et on mesure chaque fois la valeur du pH.

Les résultats obtenus sont consignés dans le tableau ci-contre.

V_A (m L)	30	25	22	18	15	10
V_B (m L)	10	15	18	22	25	30
pH	3,3	3,5	3,7	3,8	4,0	4,3
$x=\log\frac{V_B}{V_A}$	[illegible]	-0,222	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

1-Indiquer en justifiant la réponse, les entités chimiques présentes dans chaque mélange.

2-a) En supposant que l'acide HCOOH et sa base conjuguée réagissent très faiblement avec l'eau, pour les valeurs de pH comprises entre 3,3 et 4,3, montrer que : $\frac{[HCOO^-]}{[HCOOH]} = \frac{V_B}{V_A}$.

b) Déduire l'expression du pKa du couple HCOOH/HCOO$^-$ en fonction de x.

3-a)Compléter le tableau précédent et tracer la courbe donnant les variations du pH en fonction de x.

b) Déterminer la valeur de la constante d'acidité Ka du couple HCOOH/HCOO$^-$.

Corrigé série 20

Ex 2 :

1°/ $AH + H_2O \rightleftarrows A^- + H_3O^+$

2°/a)

	AH	$+ H_2O$	$\rightleftarrows A^-$	$+ H_3O^+$
$t=0$	C_0	$-$	0	$10^{-pKe/2}$
t_f	$C_0 - y_f$	$-$	y_f	10^{-pH}

268

$\tau_{f0} = \dfrac{y_f}{y_{max}} = \dfrac{y_f}{C}$

. $C > 10^{-6}\ mol\,L^{-1}$, $pH < 6 \Rightarrow$ On néglige les ions provenant de l'ionisation propre de l'eau devant ceux provenant de l'acide $\Rightarrow [H_3O^+] = y_f$

d'où $\tau_{f0} = \dfrac{[H_3O^+]}{C} = \dfrac{10^{-pH}}{C} \simeq 0{,}04$

b) $\tau_{f0} < 0{,}05 \Rightarrow AH$ est faiblement ionisé.

c) $pH = \frac{1}{2} pKa - \frac{1}{2} \log C$

$pKa = 2pH + \log C = 3{,}8$

3°/ On prélève 1 mL de S_0 par la pipette jaugée de 1 mL, qu'on verse ds une fiole jaugée de 1000 mL et on complète avec l'eau distillée jusqu'au trait de la jauge en agitant.

4°/ $pH_f = \frac{1}{2} pKa - \frac{1}{2} \log \frac{C}{1000}$

$= \underbrace{\frac{1}{2} pKa - \frac{1}{2} \log C}_{} + \frac{1}{2} \log 1000$

$= pH_i + \frac{1}{2} \underbrace{\log(1000)}_{3}$

$pH_f = 2{,}4 + \frac{1}{2} \cdot 3$

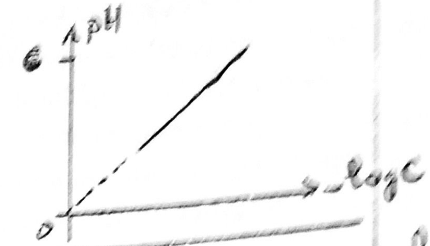
$pH_f = 3{,}9$

Ex 1 :

1°) et 2°)

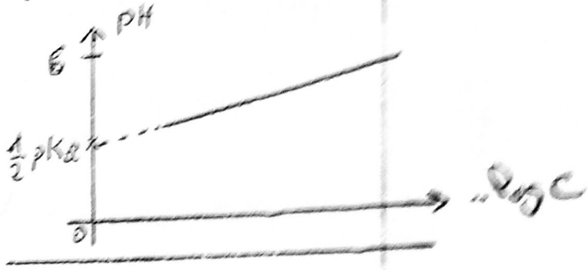
Acide fort : $\boxed{pH = -\log C}$

$C > 10^{-6}\ mol.L^{-1}$; $pH < 6$; $\tau_f \simeq 1$



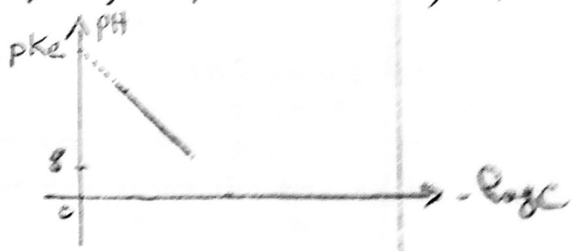
Acide faible : $\boxed{pH = \frac{1}{2}(pKa - \log C)}$

$C > 10^{-6}\ mol.L^{-1}$; $pH < 6$; $\tau_f \leq 0{,}05$



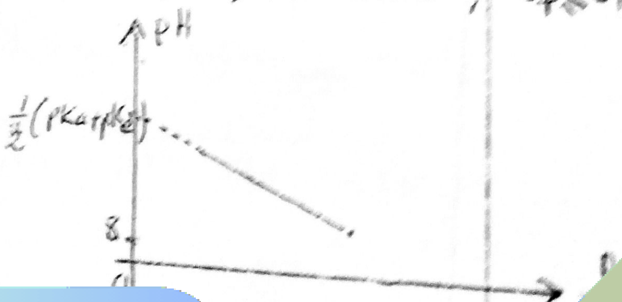
Base forte : $\boxed{pH = pKe + \log C}$

$pH > 8$; $C > 10^{-6}\ mol\,L^{-1}$, $\tau_f \simeq 1$



Base faible : $\boxed{pH = \frac{1}{2}(pKa + pKe + \log C)}$

$pH > 8$, $C > 10^{-6}\ mol.L^{-1}$, $\tau_f \leq 0{,}05$



Corrigé série n°20

269

2

Ex 5 :

1°/ les réactions produites dans (S_A) sont symbolisées par les equations :

$$2H_2O \rightleftharpoons OH^- + H_3O^+$$

$$HCOOH + H_2O \rightleftharpoons HCOO^- + H_3O^+$$

les réactions produites dans (S_B) sont symbolisées par les equations :

$$2H_2O \rightleftharpoons OH^- + H_3O^+$$

$$NaHCOO \rightleftharpoons Na^+ + HCOO^-$$

$$HCOO^- + H_2O \rightleftharpoons HCOOH + OH^-$$

Donc, les entités chimiques présentes en solution dans chaque mélange sont :

Na^+, $HCOOH$, $HCOO^-$, H_3O^+, OH^- et H_2O.

2°/a) $HCOOH$ et $HCOO^-$ ne réagissent pratiquement pas avec l'eau, d'où

$$[HCOOH] \simeq [HCOOH]_i = \frac{C_A V_A}{V_A + V_B}$$

et $[HCOO^-] \simeq [HCOO^-]_i = \dfrac{C_B V_B}{V_A + V_B}$

avec $C_A = C_B$ donc :

$$\frac{[HCOO^-]}{[HCOOH]} = \frac{V_B}{V_A}$$

b°) $Ka = \dfrac{[HCOO^-][H_3O^+]}{[HCOOH]} = \left(\dfrac{V_B}{V_A}\right)[H_3O^+]$

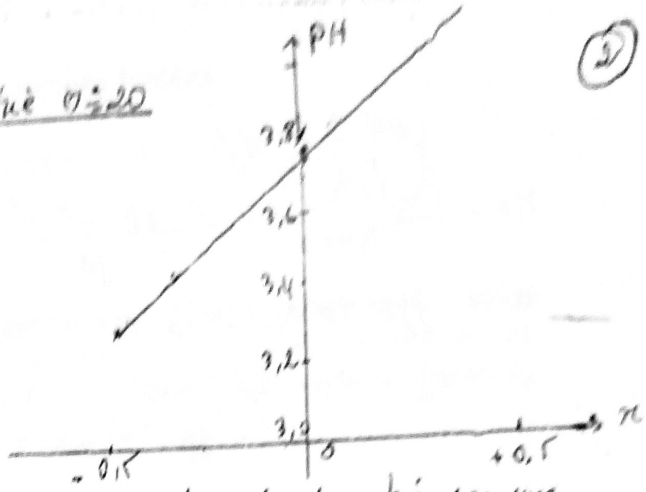
d'où $pKa = -\log Ka$:

$$pKa = pH - \log \frac{V_B}{V_A}$$

$$\boxed{pKa = pH - x}$$

3°/a)

V_A (mL)	30	25	22	18	15	10
V_B (mL)	10	15	18	22	25	30
pH	3,3	3,5	3,7	3,8	4,0	4,3
x	-0,48	-0,22	-0,09	0,09	0,22	0,48



3°) La courbe tracée est portée par une droite affine modélisée par l'équation :

$$pH = a \log\left(\frac{V_B}{V_A}\right) + b = a x + b$$

avec : $b = 3,76$ et $a = 0,98 \simeq 1,0$

d'où $pH = 3,76 + x$

or $pH = pKa + x \Leftrightarrow pKa = 3,76$

et $Ka = 10^{-pKa} = 10^{-3,76}$

$$\underline{Ka = 1,73 \cdot 10^{-4}}$$

Ex 4 :

1°/a) A concentrations égales, la solution basique qui a le pH le plus élevé correspond à la base la plus forte.

$pH_2 > pH_1 > pH_3$ d'où

B_3 — B_1 — B_2 → basicité ↗

b) B_2 correspond à la base NaOH : base forte

$pH_2 = pKe + \log C_2 \Leftrightarrow$

$\log C_2 = pH_2 - pKe$

$C_2 = 10^{pH_2 - pKe} = 10^{-1}$ mol L^{-1}

2°/

	B +	H_2O	$\rightleftharpoons$ BH^+	+ OH^-
t_i	C	—	0	$10^{-pKe/2}$
t_f	$C - y_f$	—	y_f	$10^{pH - pKe}$

• Pour des solutions basiques tq $pH > 8$ et $C > 10^{-6}$ mol. L^{-1} on néglige les ions provenant de l'ionisation propre de l'eau.

220

3

Corrigé série N° 20

$[OH^-] \simeq y_f$

$Ka = \frac{[B][H_3O^+]}{[BH^+]} = \frac{(C-y_f)[H_3O^+]}{y_f}$

avec $y_f = \tau_f \, y_{max} = \tau_f . C$

$\Rightarrow Ka = \frac{C(1-\tau_f)[H_3O^+]}{y_f}$

• 2ème Approximation : Une base faible faiblement ionisée tq $\tau_f < 0{,}05$

on a : $1 - \tau_f \simeq 1$

$\Rightarrow Ka = \frac{C[H_3O^+]}{[OH^-]} = \frac{C[H_3O^+]^2}{Ke}$

$\Leftrightarrow [H_3O^+]^2 = \frac{Ka . Ke}{C}$

soit $pH = \frac{1}{2}(pKa + pke + \log C)$

3°) On vérifie que les bases B_1 et B_3 sont faiblement ionisées.

• $\tau_{f_3} = \frac{y_f}{C} = \frac{[OH^-]}{C} = \frac{10^{pH_3 - pKe}}{C}$

$\tau_{f_3} = 10^{-2,4} = 0{,}004$

• $\tau_{f_1} = \frac{10^{pH_1 - pKe}}{C} = 10^{-1,9}$

$= 0{,}012$

τ_{f_1} et $\tau_{f_3} < 0{,}05$ donc faiblement ionisée

de plus pH_1 et pH_3 sont > 8 donc la formule précédente est valable.

$\Rightarrow$ • $pKa_1 = 2pH_1 - (pke + \log C)$

$= 2(11{,}1) - (14 - 1)$

$= 9{,}2$

$pKa_3 = 2(10,6) \ldots$

$= \ldots$

d'où B_1 : Ammoniac

B_3 : Morphine

EX3

1°/ $NH_3 + H_2O \rightleftarrows NH_4^+ + OH^-$

	NH_3	H_2O	NH_4^+	OH^-
t_i	C	−	0	$10^{-pKe/2}$
t_f	$C - y_f$	−	y_f	10^{pH-pke}

2°/ $\tau_f = \frac{y_f}{C}$?

$C = \frac{n}{V} = \frac{V_{NH_3}}{V_m . V} = 0{,}1 mol$

$C > 10^{-6} mol L^{-1}$ et $pH > 8$

donc on néglige les ions provenant de l'ionisation propre de l'eau

$\Rightarrow y_f \simeq [OH^-] = 10^{pH - pke}$

$\Rightarrow \tau_f = \frac{10^{pH-pke}}{C} = 10^{-1,9} = 0{,}0126$

3°) $\tau_f < 0{,}05 \Rightarrow$ l'ammoniac est faiblement ionisé.

4°/ Le pH d'une solution de base faiblement ionisée :

$pH = \frac{1}{2}(pKa + pKe + \log C)$

$\Leftrightarrow pKa = 2pH - (pKe + \log C)$

$pKa = 9{,}2$

5°/ a) la concentration $C' < C$

donc $\log C' < \log C$

d'où $pH' = \frac{1}{2}(pKa + pKe + \log C')$

$\log C'$ diminue donc $pH' \downarrow$

donc le pH diminue

b) On diminue T, l'équilibre se déplace ds le sens exothermique

donc dans le sens ~~(1)~~ sens

de formation de $[OH^-]$,

pH augmente

Série n°21- Oscillations mécaniques forcées

Section Maths : Application de la RFD et la représentation de Fresnel.

Section Sciences exp : Analogie électrique-mécanique.

271

Ex1

Un solide (S) de masse m=100 g et de centre d'inertie G est fixé à un ressort de raideur $k=40\ N.m^{-1}$ et de masse négligeable par rapport à m. Le solide (S) est soumis à une force de frottement de type visqueux dont la résultante est équivalente à une force f= -0,8.v, avec v représente la vitesse du centre d'inertie G du solide. Le solide (S) est excité par une force $\vec{F} = F_m \sin(\omega t)\,\vec{i}$.

1-Représenter les forces exercées sur le solide (S).

2-a) Etablir l'équation différentielle du mouvement vérifiée par l'élongation x(t).

b) Déterminer les expressions de X_m et de φ_x.

c) En déduire Les expressions numériques de x(t) et de v(t) pour : $\omega=18\ rad.s^{-1}$, et $F_m=1,2\ N$.

3-En modifiant la pulsation de l'excitateur, pour une valeur ω', on constate que l'amplitude des oscillations devient maximale.

a) Donner le nom du phénomène dont l'oscillateur est le siège à la pulsation ω'.

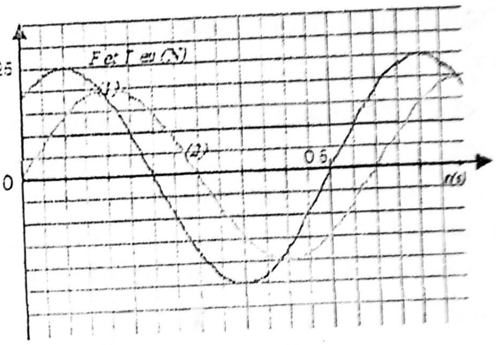
b) Dans le cas d'un circuit R, L, C série, un phénomène analogue peut être observé à une valeur ω' de la pulsation de la tension excitatrice u(t). Etablir l'expression de ω' en fonction de ω_0, R et L.

c) En déduire l'expression de ω' en fonction de ω_0, h et m.

4-Calculer la puissance mécanique moyenne à cette pulsation.

Ex2

Un solide (S) de masse m et de centre d'inertie G est fixé à un ressort de raideur $k=12\ N.m^{-1}$. Le solide est soumis à une force de frottement f=-h v. On applique à (S) une force excitatrice $\vec{F} = F_m \sin(\omega t)\,\vec{i}$.



1-Pour une fréquence N=2Hz, on donne les courbes représentant les variations des mesures algébriques de la force excitatrice F et la tension du ressort T.

a)Identifier en justifiant les courbes et déduire F_m et φ_F.

b) Calculer $(\varphi_F - \varphi_T)$ et en déduire φ_T.

2-En utilisant l'analogie électrique –mécanique :

a) Citer les dipôles électriques analogues respectivement à un ressort, un solide et au dispositif de frottement ainsi que les grandeurs électriques analogues aux grandeurs mécaniques correspondantes.

b) Ecrire l'équation différentielle de l'oscillateur mécanique ainsi que la solution sachant que l'équation différentielle d'un oscillateur électrique forcé est de la forme : $L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{c} = u(t)$

et sa solution est de la forme $q(t) = q_m \sin(2\pi N t + \varphi_q)$.

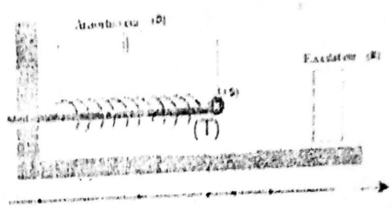
3-On associe les vecteurs V_1, V_2, V_3 et V respectivement en fonction de x(t), $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, et F(t).

a)Déterminer pour N =2Hz les mesures en Newton et les phases en radian des vecteurs V_1 et V_3.

b) Représenter à l'échelle 5 cm pour 0,1N, les vecteurs V_1 et V_3 et compléter par V_2.

c)Déduire de cette construction : X_m, k, et m sachant que $h= 0,463\ kg.s^{-1}$.

Ex3 :

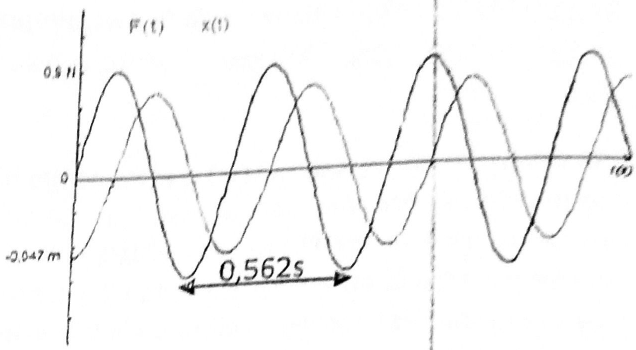


On considère le pendule élastique de la figure ci-contre. Le solide (S) est un aimant de masse m=0,16 kg capable de coulisser sans frottement le long de la tige (T) horizontale. L'électro-aimant (E) excite le solide (S) en exerçant une force $\vec{F} = F_m \sin(2\pi N t)\,\vec{i}$.

Le dispositif d'amortissement (D) exerce à tout instant une force de frottement $\vec{f} = -h\vec{v}$ où h est une constante positive.

En régime permanent l'élongation du centre d'inertie G de (S), est $x(t)= X_m \sin(2\pi Nt+ \varphi_x)$.

Pour une fréquence $N=N_1$ de l'excitateur, on donne les enregistrements de F(t) et x(t) sur la figure ci-contre.



1-Donner les expressions numériques de x(t) et de F(t).

2-Déterminer la valeur du déphasage $(\varphi_F - \varphi_x)$ et en déduire $(\varphi_F - \varphi_x)$.

3-Montrer que l'oscillateur est en états de résonance de vitesse et calculer V_m et h.

4-En déduire la valeur de la fréquence propre N_0 et celle de la raideur k.

5-Calculer la valeur de la puissance mécanique P_0 consommée.

6-Montrer dans ce cas que l'oscillateur se comporte comme un oscillateur libre non amorti.

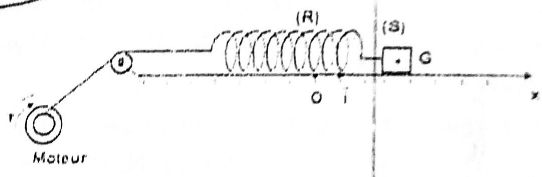
7-On diminue légèrement la fréquence N de l'excitateur, on constate que pour une valeur N_r de la fréquence, l'amplitude X_m des oscillations devient maximale et égale à $X_{m,r}$. Calculer N_r et $X_{m,r}$.

8- Déterminer la nouvelle valeur de φ_x.

9-La puissance mécanique moyenne va-t-elle supérieure, inférieure ou égale à P_0.

272

Ex4 :



On dispose d'un pendule élastique horizontal comportant Un ressort (R) et un solide (S) de masse m=289g (voir fig). Le solide (S) est susceptible de glisser sur un plan horizontal,, dans le repère galiléen $(O,\vec{i})$. Le ressort est de raideur $k=31{,}7\ N.m^{-1}$ et de masse négligeable devant m. Le solide (S) est soumis à une force de frottement de type visqueux dont la résultante est équivalente à une force $f= -h.\ v$, avec v représente la vitesse du centre d'inertie G du solide et h représente le coefficient de frottement. Le solide (S) à l'aide d'un dispositif approprié, est excité par une force $\vec{F}= F_m \sin(\omega t+\varphi_F)\ \vec{i}$ .Ainsi, (S) se met à osciller à la période T et avec une amplitude X_m. Pour une valeur T_1 de T, les chronogrammes de x(t) et de F(t) sont représentés (fig.2 ci-contre).

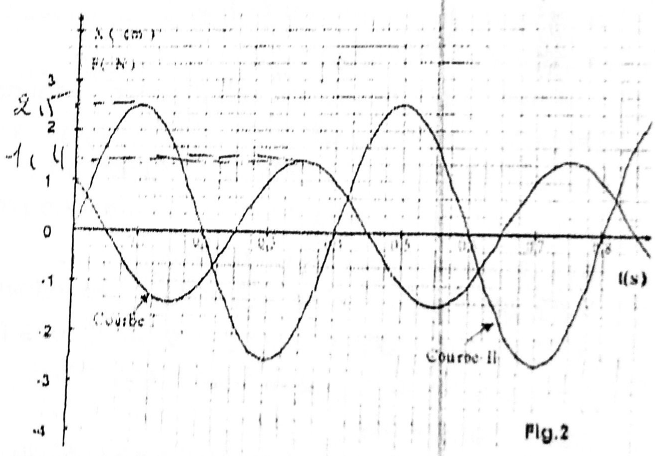


Fig.2

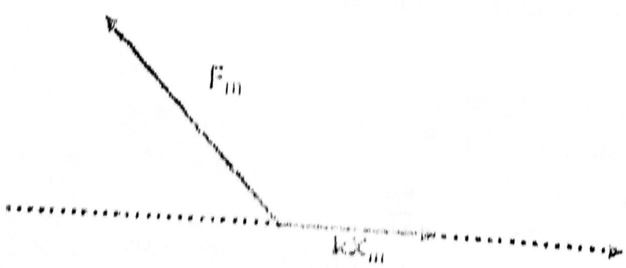
a)Montrer que la courbe I correspond à F(t).

Déterminer les expressions de x(t) et de F(t).

Etablir l'équation différentielle du mouvement vérifiée par x(t).

a)La figure ci-dessous, donne la construction de Fresnel relative aux oscillations forcées du pendule élastique à la période T_1.Compléter cette construction.

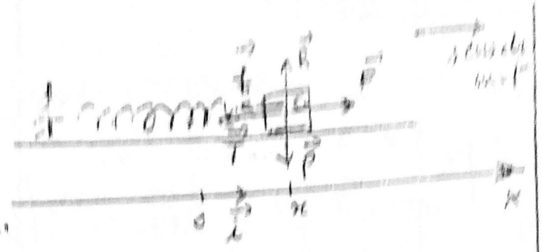
Dire sans faire de calcul, s'il faut augmenter ou bien diminuer la valeur de T_1 pour avoir une amplitude d'élongation maximale. Justifier. $T_0 = 0,6\ s$



Corrigé série n°2 (Sciences exp) (1)

Ex 1 :

1°/



2°/a) $q \longleftrightarrow x$; $\frac{1}{C} \longleftrightarrow k$

$R \longleftrightarrow h$, $L \longleftrightarrow m$; $u(t) \longleftrightarrow F(t)$

ainsi, l'équa diffé par analogie élect-méca est :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + h\frac{dx}{dt} + kx = F(t)$$

b) Par analogie avec l'expression de q_{max} :

$$q_m = \frac{U_{max}}{\sqrt{(R\omega)^2 + \left(\frac{1}{C} - L\omega\right)^2}} \longleftrightarrow X_m = \frac{F_m}{\sqrt{(h\omega)^2 + (k - m\omega^2)^2}}$$

$$tg(\varphi_q) = \frac{R\omega}{\left(L\omega^2 - \frac{1}{C}\right)} \longleftrightarrow tg(\varphi_x) = \frac{h\omega}{(m\omega^2 - k)}$$

c) $x(t) = X_m \sin(\omega t + \varphi_x)$?

φ_x ? $\quad tg\,\varphi_x = \frac{0,8 \cdot 18}{0,1(18)^2 - 40} = -1,83$

$\Rightarrow \varphi_x = -1,08$ rad

Le calcul de X_m donne : $X_m = 7,37$ cm

$\Rightarrow$ $x(t) = 7,37 \cdot 10^{-2} \sin(18t - 1,08)$

• $v(t) = V_m \sin(\omega t + \varphi_v)$

$V_m = \omega X_m = 1,32\ m s^{-1}$

$\varphi_v = \varphi_x + \frac{\pi}{2} = -1,08 + 1,57 = 0,49$ rad

$\Rightarrow$ $v(t) = 1,32 \sin(18t + 0,49)$

3°/a) X_m est maximale : résonance d'élongation.

b) $q_{max} = \frac{U_m}{\sqrt{f(\omega)}}$ est maximale ssi

$\frac{df(\omega)}{d\omega} = 0$ pour $\omega = \omega'$ (résonance de charge)

$\Rightarrow 2\omega' R^2 + 2\left(\frac{1}{C} - L\omega'^2\right)(-2L\omega') = 0$

$\underbrace{2L\omega'}_{\neq 0}\left[-2\left(\frac{1}{C} - L\omega'^2\right) + \frac{R^2}{L}\right] = 0$

$L\omega'^2 = \frac{1}{C} - \frac{R^2}{...}$

$\Leftrightarrow \omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{R^2}{2L^2}}$

c) Par analogie on a :

$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{h^2}{2m^2}}$ à la résonance d'élongation, avec $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

4°/ $P_a = \frac{1}{2} U_m \cdot I_{max} \cdot \cos(\varphi_u - \varphi_i)$

analogie

$P_0 = \frac{1}{2} F_m \cdot V_m \cos(\varphi_F - \varphi_v)$

$= \frac{1}{2} F_m V_m \frac{h V_m}{F_{max}}$

$P_0 = \frac{1}{2} h V_{max}^2$?

$V_{max} = \omega' X_m$

calculons, ω' et X_m à la résonance d'élongation.

soit $\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{h^2}{2m^2}} = 19,18\ rad\,s^{-1}$

et $X_m = 7,65 \cdot 10^{-2}$ m

$\Rightarrow V_{max} = 1,467\ m s^{-1}$

d'où $P_0 = \frac{1}{2}(0,8) \cdot (1,467)^2$

$P_0 = 0,86$ W

273

Ex 2 : Corrigé série 21 (2)

1°/a) Rappelons que $F(t)$ est tjrs en avance de phase par rapport à $x(t)$.

En effet : $-\frac{\pi}{2} < \varphi_F - \varphi_v < \frac{\pi}{2}$

$\varphi_v = \varphi_x + \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \varphi_F - \varphi_x < \pi$

$\cdot\ T = -kx \Leftrightarrow \varphi_T = \varphi_x + \pi$

d'où $T(t)$ est en avance de phase par rapport à $F(t)$

soit : ~~courbe (2) correspond à F(t)~~
courbe (1) correspond à $T(t)$

* $F_m = 0{,}2\ N$

φ_F ? $F(0) = 0$ de plus $\left.\frac{dF}{dt}\right|_{t=0} > 0$

donc $\varphi_F = 0$ rad

(on peut tirer $\varphi_F = 0$ d'après l'expression de $F(t) = F_m \sin(\omega t)$)

b°) $\varphi_F - \varphi_T < 0$

$\Rightarrow \varphi_F - \varphi_T = -\frac{2\pi}{T}|\Delta t|$

$= -\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{8} = -\frac{\pi}{4}$ rad

$\cdot\ \varphi_F - \varphi_T = -\frac{\pi}{4}$ rad avec $\varphi_F = 0$

$\Rightarrow \varphi_T = \frac{\pi}{4}$ rad.

2°/a) Ressort $\longleftrightarrow$ condensateur
solide $\longleftrightarrow$ bobine
dispositif de frottement $\longleftrightarrow$ résistor
$m \longleftrightarrow L$; $k \longleftrightarrow 1/C$; $h \longleftrightarrow R$
$x \longleftrightarrow q$; $v \longleftrightarrow i$, $F(t) \longleftrightarrow u(t)$

b) on a :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + h\frac{dx}{dt} + kx = F(t)$$

$x(t) = X_m \sin(\omega t + \varphi_x)$ est une solution.

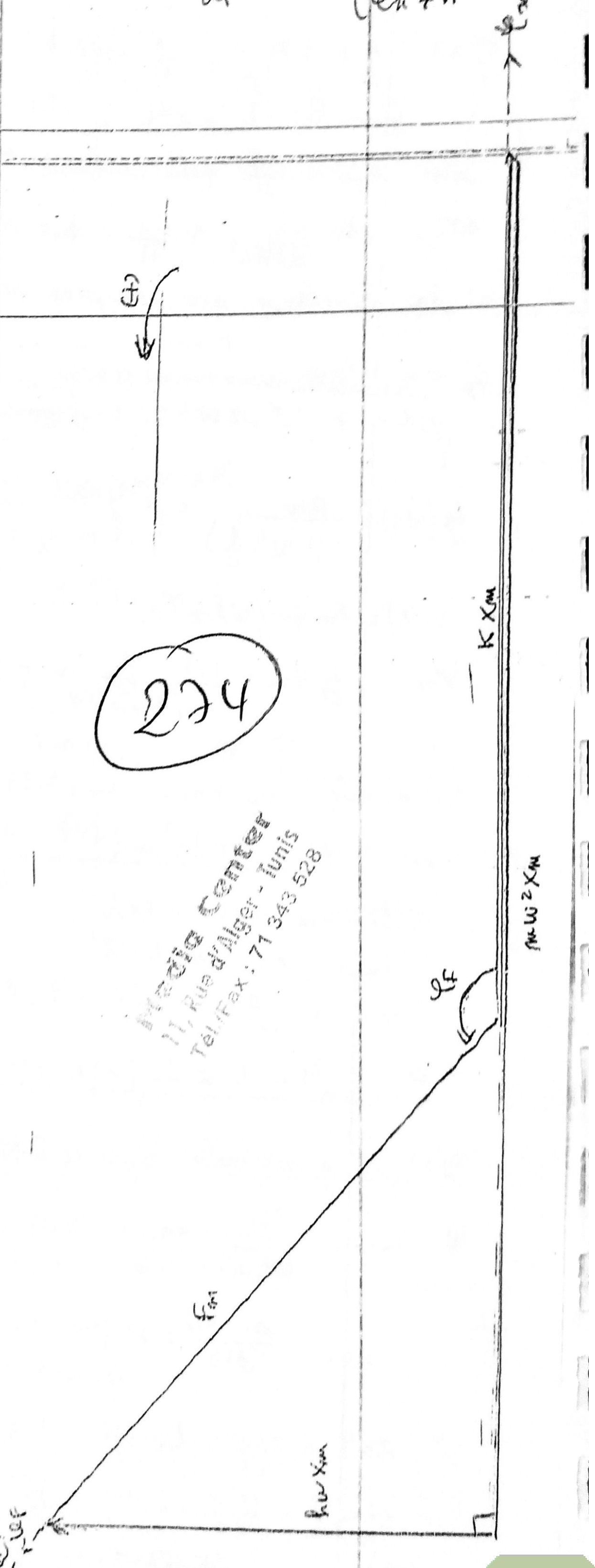
3°/ $\vec{V} \longrightarrow F(t) = F_m \sin(\omega t + \varphi_F)$

$\vec{V}\begin{pmatrix} F_m = 0{,}2N \\ \varphi_F = 0 \text{ rad}\end{pmatrix}$ $\longrightarrow$ 10 cm

$\vec{V}_1 \longrightarrow k\,x(t)$

$\vec{V}_2 \longrightarrow h\,v(t)$; $\vec{V}_2\begin{pmatrix} h\omega X_m \\ \varphi_x + \frac{\pi}{2}\end{pmatrix}$

$\vec{V}_3 \longrightarrow m\frac{d^2x}{dt^2}$; $\vec{V}_3\begin{pmatrix} m\omega^2 X_m \\ \varphi_x + \pi\end{pmatrix}$



274

Corrigé série 21 (3)

c%. $h\omega X_m \longleftrightarrow \|\vec{V_2}\| = 7cm$

$\Rightarrow h\omega X_m = \frac{7}{5} \times 0,1 = 0,14N$

d'où $X_m = \frac{0,14}{2\pi N \cdot h} \simeq 0,02m = 2cm$

. $\|\vec{V_1}\| = 12,5cm \longrightarrow KX_m = 0,25N$

$\Leftrightarrow K = \frac{0,25}{0,02} \simeq 12\,N\,m^{-1}$

. $\|\vec{V_3}\| = 19,7cm \Leftrightarrow m\omega^2 X_m = \frac{19,7}{5} \times 0,1$

$= 0,394N$

275

$m = \frac{0,394}{\omega^2 X_m} = 0,1248Kg$
$= 124,8g$

Ex3 :

$x(t) = X_m \sin(\omega t + \varphi_x)$?

D'après le graphe : $X_m = 0,047m$

. $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,562} = 11,17 rad s^{-1}$

. φ_x ? $x(0) = X_m \sin\varphi_x = -X_m$

$\sin\varphi_x = -1 \Leftrightarrow \varphi_x = -\frac{\pi}{2}$ rad

$\Rightarrow \boxed{x(t) = 0,047\sin(11,17t - \frac{\pi}{2})}$

* $F(t) = F_m \sin(\omega t + \varphi_F)$?

$F_m = 0,8N$, $\varphi_F = 0$ (d'après l'expression de $F(t)$)

$\Rightarrow \boxed{F(t) = 0,8\sin(11,17t)}$

2% $\varphi_F - \varphi_x > 0$, $\varphi_F - \varphi_x = \omega|\Delta t|$

$|\Delta t| = \frac{T}{4} \Rightarrow \varphi_F - \varphi_x = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}$ rad.

$\boxed{\varphi_F - \varphi_x = \frac{\pi}{2} \text{ rad}}$

. $v(t) = \frac{dx}{dt} \Leftrightarrow \varphi_v - \varphi_x = \frac{\pi}{2}$ rad

d'où $\varphi_F = \varphi_v \Leftrightarrow \varphi_F - \varphi_v = 0$

3% Par analogie avec la résonance d'intensité où $\varphi_u = \varphi_i$ on a : $\varphi_F = \varphi_v$ qui correspond à une résonance de vitesse.

. $V_{max} = \omega_1 X_{max} = 11,17 \cdot 0,047 = 0,52\,m\,s^{-1}$

. $F_{max} = h V_m$ à la résonance de vitesse

$\Rightarrow h = \frac{F_m}{V_{max}} = \frac{0,8}{\ldots}$

4% Résonance de vitesse : $N_0 = N_1 = \frac{\omega_1}{2\pi}$

$N_0 = 1,78\,Hz$

. $k = m\omega_0^2 = 0,16 \cdot (11,17)^2$

$k = 20\,N.m^{-1}$

5% $P_0 = \frac{1}{2} h V_{max}^2 = 0,208\,W$.

6% L'équ diff donne :

$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = F(t) - hv(t)$

avec $F(t) = F_m \sin(\omega t + \varphi_F)$

et $F_m = hV_m$, $\varphi_F = \varphi_v$

$\Rightarrow F(t) = hV_m \sin(\omega t + \varphi_v)$

$F(t) = hv(t) \Leftrightarrow F(t) - hv(t)$

d'où $\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0}$

équ diff d'un oscillateur mé libre non amorti.

7% Par analogie avec la résonance de charge : $Nr^2 = N_0^2 - \frac{R^2}{2L^2}$ on a à la résonance d'élongation :

$Nr^2 = N_0^2 - \frac{h^2}{8\pi^2 m^2}$

AN : $Nr = \sqrt{2} = 1,414\,Hz$

* $X_{m,r} = \frac{F_{max}}{\sqrt{(h\omega_r)^2 + (m\omega_r^2 - k)^2}}$

$X_{m,r} = 5,15cm = 5,15 \cdot 10^{-2}m$

8% Par analogie $\Rightarrow tg\varphi_x = \frac{h\omega_r}{m\omega_r^2 - k}$

$tg\varphi_x = -1,85 \Leftrightarrow \varphi_x = -1,07\pi$ rad

9% $P = \frac{1}{2} h V_{max}^2$

P est max lorsque V_{max} est maximale cad à la résonance de vitesse

$\Rightarrow P < P_0$

Ex 4 : Corrigé série 21 (4)

1°/ F(t) est en avance de phase par rapport à x(t) donc :

la courbe (I) correspond à F(t).

b°/ $F(t) = F_m \sin(\omega t + \varphi_F)$?

$F_m = 1,4\ N$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ avec $T = 0,4\ s$

$\Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{0,4} = 5\pi\ rad.s^{-1}$

φ_F ?

$\varphi_F - \varphi_x = \omega\,|0,1T| = \frac{2\pi}{T} \cdot (0,1T)$

$= \frac{2\pi}{0,4} \cdot 0,1T$

$= \frac{3}{4}\pi\ rad$

$\varphi_x = 0$ car $x(0) = 0$ et $\frac{dx}{dt} > 0$

d'où $\varphi_F = \frac{3\pi}{4}\ rad$

soit : $\boxed{F(t) = 1,4 \sin\left(5\pi t + \frac{3\pi}{4}\right)}$

* $x(t) = X_m \sin(\omega t + \varphi_x)$?

$X_m = 2,5 \cdot 10^{-2}\ m$

$\varphi_x = 0$ car $x(0) = 0$ et $\left.\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} > 0$

$\Rightarrow \underline{x(t) = 2,5 \cdot 10^{-2} \sin(5\pi t)}$

2°/ (R.F.D ou analogie)

$\Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} + h\frac{dx}{dt} + kx = F(t)$

3°/a/ voir figure

b°/ A la résonance d'élongation

ω_r légèrement inférieure à ω_0

donc T_r ...

or $T_1 = 0,4\ s$ et $T_0 = 0,6\ s$

donc il faut augmenter T_1

276

Dosage acide- base

Point d'équivalence

C'est le point pour lequel **les** quantités d'acide et de base introduites dans le milieu **réactionnel sont égales.**
Ce qui se traduit par $C_A.V_A = C_B.V_B$
Expérimentalement on le détermine par la méthode des tangentes.

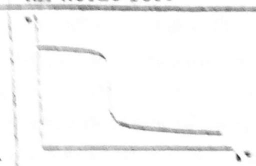
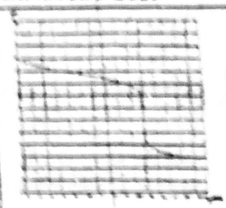
195

Point de demi-équivalence

C'est le point pour lequel la quantité versée est égale à la moitié de celle **existante dans le bécher.**

Graphiquement c'est le point pour lequel $\boxed{V_{versé} = \frac{1}{2} V_{équivalence}}$

Tableau récapitulatif

	Acide fort par une base forte	Acide faible par une base forte	Base forte par un acide fort	**Base faible par un acide fort**
courbe				
Point d'inflexion	Un seul point	Deux points	Un seul point	Deux points
Equation de la réaction	$H_3O^+ + OH^- \rightarrow 2\,H_2O$	$AH + OH^- \rightarrow A^- + H_2O$	$H_3O^+ + OH^- \rightarrow 2\,H_2O$	$B + H_3O^+ \rightarrow BH^+ + H_2O$
pH initial	$pH_i = -\log C_A$	$pH_i = \frac{1}{2}(pKa - \log C_A)$	$pH_i = pKe + \log C_B$	$pH_i = \frac{1}{2}(pKa + pKe + \log C_B)$
pH à la demi-équivalence		$pH_{\frac{E}{2}} = pKa$		$pH_{\frac{E}{2}} = pKa$
pH à l'équivalence	$pH_E = \frac{1}{2} pKe = 7$ à 25°C	$pH_E = \frac{1}{2}(pKa + pKe - \log \frac{C_A V_A}{V_{BE} + V_A})$	$pH_E = \frac{1}{2} pKe = 7$ à 25°C	$pH_E = \frac{1}{2}(pKa - \log \frac{C_B V_B}{V_{AE} + V_B})$
pH limite	$pH_{lim} = pKe + \log C_B$	$pH_{lim} = pKe + \log C_B$	$pH_{lim} = -\log C_A$	$pH_{lim} = -\log C_A$

Influence de la dilution

Dans certains cas on dilue le contenu du bécher pour que la sonde du pH- mètre plonge convenablement. Cette opération a pour conséquences :

	Acide fort par une base forte	Acide faible par une base forte	Base forte par un acide fort	Base faible par un acide fort
Volume à l'équivalence	Ne varie pas	Ne varie pas	Ne varie pas	Ne varie pas
pH initial	augmente	augmente	diminue	diminue
pH à la demi-équivalence		Ne varie pas		Ne varie pas
pH à l'équivalence	Ne varie pas	diminue	Ne varie pas	augmente
pH limite	Ne varie pas	Ne varie pas	Ne varie pas	Ne varie pas

I

Exercice n°1

On se propose de déterminer la concentration C_a d'une solution (S) d'un acide fort AH par dosage avec une solution de soude de concentration C_b. Trois groupes d'élèves réalisent des expériences.

1er groupe : Il prélève V_a= 20 mL de la solution (S) et réalise un dosage pH-métrique.

2ème groupe : Il prélève V_a= 20 mL de la solution (S) et afin d'immerger convenablement la sonde il ajoute un volume V_e d'eau puis réalise un dosage pH-métrique.

3ème groupe : il prélève 20 cm³ de la solution (S) et introduit ce volume dans une fiole jaugée de volume V_F et complète avec de l'eau distillée jusqu'au trait de jauge. Il prélève ensuite un volume V_a = 20 cm³ de la solution diluée et réalise un dosage.

On obtient les courbes (a), (b) et (c) représentant les trois dosages

1) Justifier à partir des courbes que la solution de soude a une concentration C_b =0,02 mol/L.

2) a- Justifier à partir de l'allure des courbes que la courbe (a) est celle du 1er groupe.

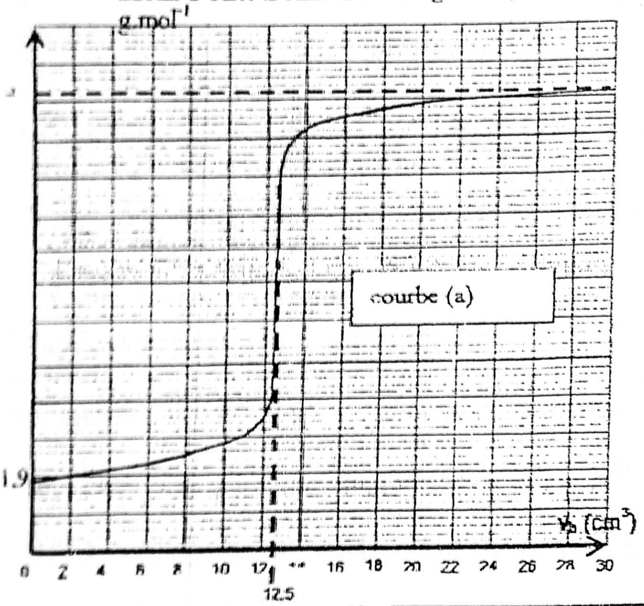
b- En déduire la concentration C_a de la solution S.

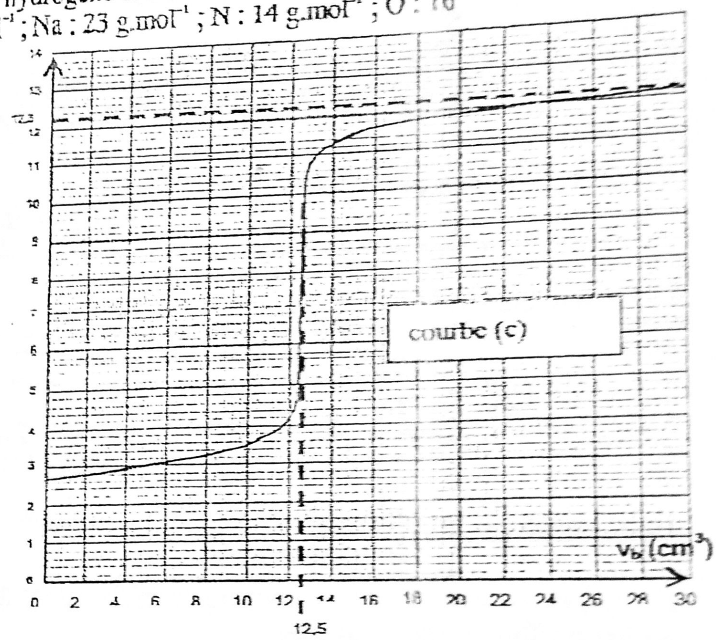
3) a- Laquelle des deux autres courbes est celle du 2ème groupe ? Justifier.

b- En utilisant le pH initial de la courbe correspondante, déduire V_e.

5) Trouver le volume V_F de la fiole utilisé par le 3ème groupe.

6) Le 1er groupe évapore la solution obtenue à l'équivalence et pèse le résidu obtenu. Il trouve une masse m = 21,25 mg. L'acide AH est-il du chlorure d'hydrogène HCl ou l'acide nitrique HNO_3 ou aucun d'eux? Données : H : 1 g.mol⁻¹ ; Cl : 35,5 g.mol⁻¹ ; Na : 23 g.mol⁻¹ ; N : 14 g.mol⁻¹ ; O : 16 g.mol⁻¹





Exercice n° 2

Au cours d'une séance de travaux pratiques, un professeur décide de faire vérifier par ses élèves la concentration d'une solution commerciale S_A d'acide chlorhydrique. La valeur affichée sur le flacon est C=8,4 mol.L^{-1}. Pour cela il répartit ses élèves en trois groupes G_1, G_2 et G_3 et il met à leur disposition la verrerie, le matériel et les produits suivants :

- pipettes jaugées de 10 et 20 ml ; -burette graduée de 25 ml ; - bécher de 250 ml
- fioles jaugées de 50,100, 200, 500 et 1000 ml ; -eau distillée ; -solution S_B de NaOH de concentration C_B=0,1 mol.L^{-1}.

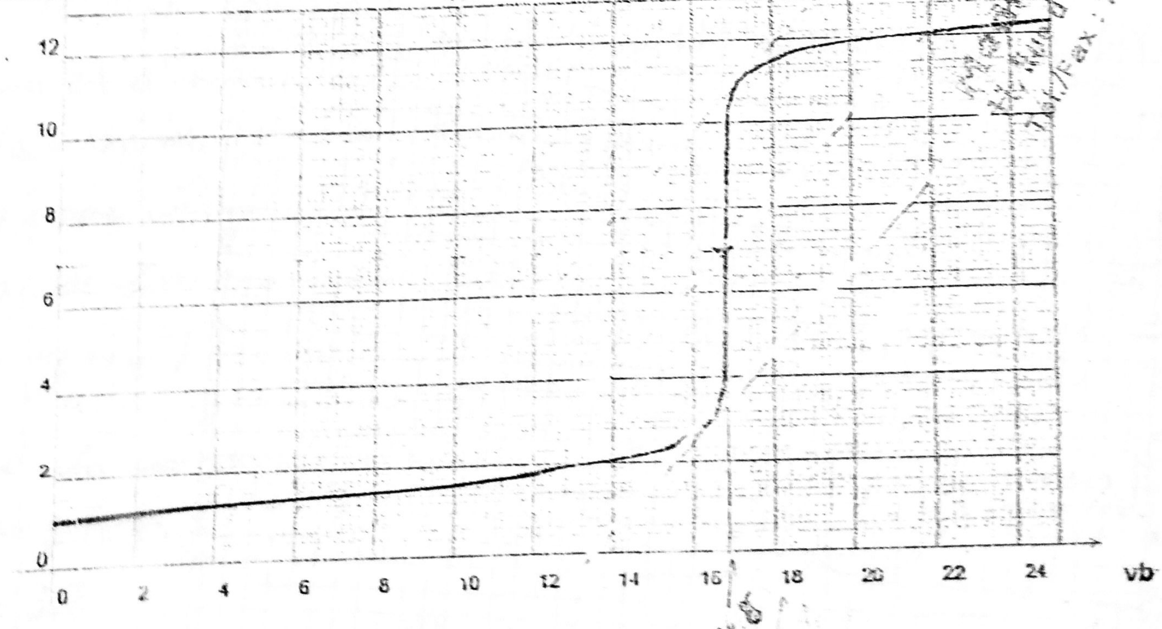
Aux groupes G_1, G_2 et G_3, il donne à chacun un flacon contenant un indicateur coloré différent :
G_1 : l'hélianthine ; G_2: le rouge de méthyle ; G_3 : le bleu de bromothymol.

1) Quel est le volume V_{Be} de la solution d'hydroxyde de sodium nécessaire pour doser un volume V_A = 20 ml de la solution commerciale. Quel inconvénient cette valeur présente-t-elle compte tenu du matériel disponible ? Proposer une solution.
2) Le professeur demande aux élèves de diluer 100 fois la solution commerciale S_A et de préparer une solution S'_A avec la verrerie disponible. Décrire le mode opératoire.
3) Chaque groupe ayant préparé cette solution S'_A, de concentration C'_A, ils ont fait leurs dosages en parallèle. Ils prélèvent chacun un volume V'_A=20 ml de leur solution S'_A qu'ils dosent avec la même solution S_B en présence de l'indicateur coloré dont ils disposent, les volumes V_{Be} versés à l'équivalence sont consignés dans le tableau.

Groupe	G_1	G_2	G_3
V_{Be} (ml)	16.6	16.8	16.8

a) Le(s) quel(s) des résultats est en accord avec la valeur théorique de V'be.
b) Les élèves ayant trouvé le résultat en accord avec cette valeur concluent que la valeur affichée sur la flacon est bien conforme, tandis que les autres affirmant que leurs mesures étaient précises concluent le contraire. Le professeur intervient alors en mettant à leur disposition la courbe du dosage pH-métrique de la même solution S'_A et les zones de virages des indicateurs colorés utilisés.

Indicateur coloré	Zone de virage (pH)
Hélianthine	3,2—— 4,4
B.B.T	6,0—— 7,6
Rouge de méthyl	4,4—— 6,2

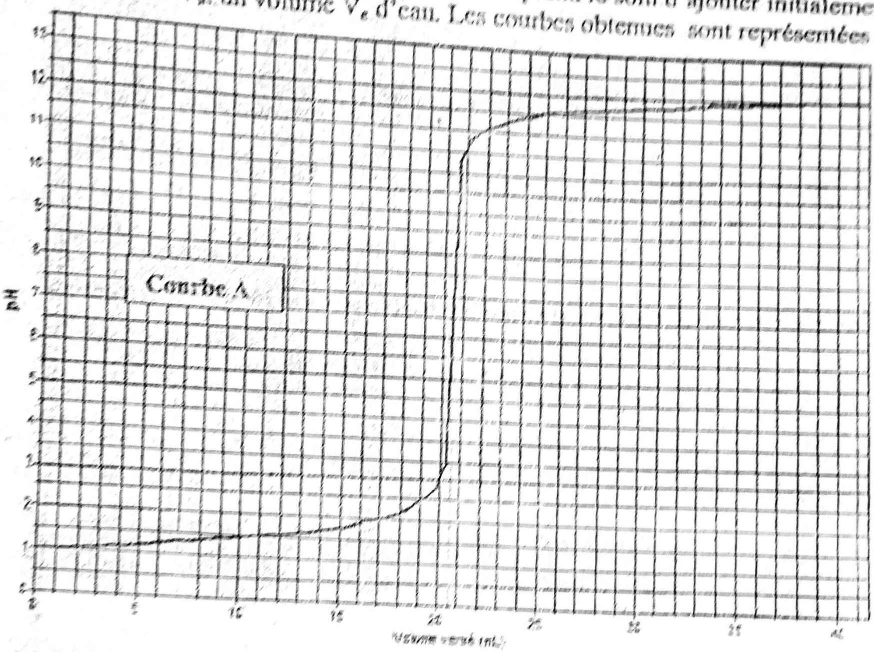


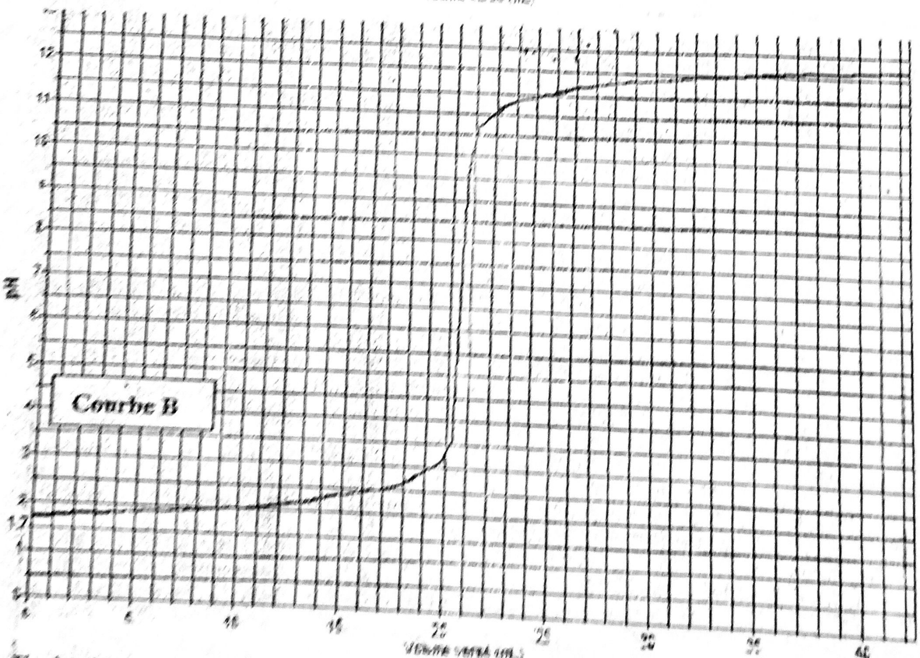
- Quel est l'indicateur coloré le mieux adapté à ce dosage? Justifier
- Quel autre indicateur parmi ceux proposés pourrait donner le même résultat ? Justifier
- Après réflexion les élèves du groupe G_1 affirment « nos résultats sont précis » ; expliquer pourquoi le professeur est

Exercice n°3.

Un sachet de détartrant porte l'indication "acide sulfamique : 1 g". Cet acide sera considéré comme un acide fort de formule NH_2SO_3H ($M = 97\ g.mol^{-1}$). Deux groupes d'élèves G_1 et G_2 dissolvent chacun le contenu du sachet dans de l'eau distillée pour obtenir un volume $V = 100\ mL$ d'une solution (S).

- Le groupe G_1 prélève $V_A = 20{,}0\ mL$ de (S) et la dose avec une solution de soude de concentration $C_B = 0{,}10\ mol.L^{-1}$. Ce dosage est suivi par pH-métrie.
- Le groupe G_2 effectue le même travail, mais prend le soin d'ajouter initialement au même prélèvement V_A un volume V_e d'eau. Les courbes obtenues sont représentées ci-dessous :





198

1) Ecrire l'équation de la réaction ayant lieu au cours du dosage.
2) Identifier en justifiant à quel groupe G_1 ou G_2 correspond chacune des courbes.
3) Déterminer la concentration C_A de la solution S.
4) Vérifier en faisant les calculs nécessaires si l'indication « 1 g d'acide sulfamique » est correcte.
5) Evaluer le volume d'eau ajoutée par le groupe G_2.

Ex 1

Dosage Fat. Fat (A)

$pH_{limite} = pKe + \log C_B$

$C_B = 10^{pH_{lim} - pKe}$

$C_B = 10^{12,3-14} = 10^{-1,7}$

$C_B = 0,02\ mol.L^{-1}$

a) On rappelle que pour un acide fort, $pH_i = -\log C$

pH_i est la plus basse pour une solution non diluée correspond à la courbe(a)

d'où le 1er groupe est relative à la courbe(a).

b) Au pt d'équivalence :

$C_aV_a = C_BV_{BE}$

$\Leftrightarrow C_a = \frac{C_B.V_{BE}}{V_a} = \frac{0,02.12,5.10^{-3}}{20.10^{-3}}$

$C_a = 1,25.10^{-2} mol.L^{-1}$

3°/a) Pour les deux courbes (a) et (b), l'équivalence est atteinte avec le même volume $V_B = 12,5\ mL$ donc la qté d'ions H_3O^+ n'a pas changé, car la dilution d'un acide fort n'a aucun effet sur le $n(H_3O^+)$

d'où la courbe(b) correspond au groupe 2.

b) $pH_i = 2,7$

$pH_i = -\log C'$ ⟺ $C' = 10^{-pH_i} = 2.10^{-3} mol.L^{-1}$

$\frac{C}{C'} = \frac{V'}{V}$ ⟺ $\frac{V_e + V}{V} = \frac{C}{C'}$

donc $\boxed{V_e = V\left(\frac{C}{C'} - 1\right)}$

$V_e = ...$

5°/ V_e ?

$C_3 = 10^{-pH_i} = 10^{-2,3} = 5.10^{-3} mol.L^{-1}$

$\frac{C}{C_3} = \frac{V_e + V}{V}$

$\Leftrightarrow V_e = V\left(\frac{C}{C_3} - 1\right) = 30\ mL$

6°/ $Na^+ + A^- \longrightarrow \underbrace{NaA}_{\text{résidu obtenu}}$

A l'équivalence :

$n_{Na^+} = C_BV_{BE} = 0,02.12,5.10^{-3}$
$= 2,4.10^{-4} mol$

$n_{A^-} = C_AV_{AE} = 12,5.10^{-3}.0,02$
$= 2,4.10^{-4} mol$

d'où $n(NaA) = 2,4.10^{-4} mol$

$\Rightarrow M_{NaA} = \frac{m}{n} = \frac{21,25.10^{-3}}{2,4.10^{-4}}$
$= 85 g.mol^{-1}$

or : $M_{NaCl} = 58,5 g.mol^{-1}$

$M_{NaNO_3} = 85 g.mol^{-1}$

⟺ il s'agit de HNO_3

199

Corrigé Dosage Fort. Fort

Ex 2

200

1°/ A l'équivalence:

$C_B V_{BE} = C_A . V_A$

$\Rightarrow V_{BE} = \frac{C_A V_A}{C_B} = \frac{8,4 . 0,02}{0,1}$

$V_{BE} = 1,68 L$

• Pour atteindre l'équivalence il faudra remplir la burette (de 25 mL) plus que 67 fois.

Solution: On doit diluer la solution acide n fois, prélever ensuite un volume V_A et réaliser le dosage

2°/ On prélève 10 mL de la solution S_A à l'aide de la pipette jaugée de 10 mL qu'on verse dans une fiole jaugée de 1000 mL et on complète avec de l'eau distillée tout en agitant jusqu'au trait de la jauge

3°/ a) La nouvelle concentration de la solution acide est: $C'_A = \frac{C_A}{100} = 8,4.10^{-2}$ mol L^{-1}

A l'équivalence:

$V'_{BE} = \frac{C'_A V_A}{C_B} = \frac{8,4.10^{-2} . 20 mL}{0,1}$

$V_{BE} = 16,8 mL$

⇒ les résultats des groupes G2 et G3 sont en accord avec la valeur théorique.

4°/ C'est le BBT car sa zone de virage contient le pH à l'équivalence.

• c'est le rouge de méthyle car sa zone de virage est proche de ... pH ...

• l'équivalence est obtenue avec un V_{BE} égal à 16,8 mL ⇒ G_1 est plus précis que les autres. (courbe

Ex 3

1°/ L'acide s'ionise dans l'eau suivant l'équation:

$NH_2SO_3H + H_2O \rightarrow NH_2SO_3^- + H_3O^+$

donc la réaction de dosage s'écrit.

$H_3O^+ + OH^- \rightarrow 2H_2O$.

2°/ L'ajout de l'eau fait augmenter le pH initial de la solution (acide fort: $pH_i = -\log C$)

donc gpe G1 ⟷ courbe (A)

G2 ⟷ courbe (B)

3°/ $C_A = \frac{C_B . V_B}{V_A} = \frac{0,1 . 20,5}{20}$

$C_A = 0,1025$ mol L^{-1}

4°)

m = 1g

V = 0,1L

$C_0 = \frac{m}{M.V} = \frac{1}{97 . 0,1}$

$C_0 = 0,103$ mol L^{-1}

$C_0 \simeq C_A$ ⇒ L'indication "1g" est correcte.

5°/ $-\log(C') = pH'_i$

$\Rightarrow C' = 10^{-pH'_i} = 10^{-1,7} = 0,02$ mol L^{-1}

$\frac{C_A}{C'} = 5,15 = \frac{V'_A}{V_A}$

avec $V'_A = V_A + V_{eau}$

$\Rightarrow V_{eau} = V_A [5,15 - 1]$

$= 20(4,15) = 83 mL$